目　录

导　论

长期以来，分析中的基函数是余弦函数、正弦函数和虚指数函数．函数 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 构成了空间 $L^2[0, 2\pi]$ 的一组正交基（指规范正交，下同）．Fourier 级数是它们的线性组合 $\sum\alpha_k e^{ikx}$．对它们的研究一直是并且仍然是数学分析中问题和发现的用之不尽的源泉．之所以问题多，这主要是因为缺乏一本好的字典，用它可以把函数的性质翻译到它的 Fourier 系数上．这里有一个例子说明这个困难．J. P. Kahane, Y. Katznelson 和 K. de Leeuw 已经证明了（〔150〕）：从任一个平方可和函数 $f(x)$ 出发，为了得到一个连续函数 $g(x)$，只需或者增大 $f(x)$ 的 Fourier 系数的模，或者保持它不变并适当地改变系数的位相．因此不可能仅根据 Fourier 系数大小的阶就预知函数的性质（大小，正则性）．更清楚地认识这些仍然是困难的，许多问题还有待解决．

在 80 年代初，一些科学家就使用了“小波”作为传统 Fourier 分析的一个替代物．用这个替代物可以期待把数值分析做得更简单，并把某些瞬时现象的综合做得更有力．J. S. Lienard 和 X. Rodet(〔167〕，〔206〕）涉及到声学信号（语言和音乐）的数值处理，J. Morlet 的小波（〔124〕）则是用来贮存和表示在石油勘测中收集到的地震信号．从数学方面来说，探索也在积极地进行．为说明问题，我们只要提到 R. Coifman 和 G. Weiss 创立的“原子”和“分子”学说就够了．这些“原子”和“分子”构成了不同函数空间的基的组成部分．它们是很明确地被确定的，对使用者来说，又是很简单的．某些原子分解可以通过对A. Calderon 的一个著名恒等式的离散化来得到．而在这个恒等式中，

“小波”已经是被隐蔽地勾划出来了. 这个恒等式后来又被Morlet和他的合作者们重新发现……. 最后, L. Carleson使用了非常像“小波”的函数构造了Stein和Weiss的空间H^1的无条件基.

这些不同的工作显示了某种“和谐性”; 由此可以看出, 应该而且可以用数学上有根据的、又是普遍适用的、有内在联系的理论把它们统一起来. 本书将要研究的**小波正交基**就取代了Lienard, Morlet和Rodet的经验“小波”.

正是这些小波正交基给出了Coifman和Weiss所发现的“原子分解”的一个直接方法, 小波正交基也首次构造出了通常函数空间的**无条件基**. 小波基是普遍适用的; 一切准备就绪, “伸手可得”, 这就是说: 函数或分布是小波级数的和, 与用Fourier级数来做这件事的情形不同, 这些级数的系数以简单的方式精确并忠实地表达了这些函数或分布的性质.

这样, 人们就有了一个新的工具, 用它可以得到以前只有用缺项的或随机的Fourier级数才能办到的微妙的结构. 这些特殊级数的例外好的性质现在变成了一般小波级数的平凡性质.

正交小波级数的分析或综合方法将在科学和技术的不同领域中起着重要作用. 本书第Ⅰ卷(第Ⅰ章到第Ⅵ章)是为所有想了解小波的读者——数学家、物理学家和工程师们而写的.

本书的第Ⅱ卷和第Ⅲ卷是特意为数学家们写的, 它们讨论与小波有关的算子. G. Weiss曾指出: 当一个空间可以作“原子分解”时, 对作用到这个空间上的算子的研究就变得很简单了. 他写道: “分析中的许多问题可自然地表述为定义在函数或分布空间上的线性算子的连续性问题. 如果这个问题可以首先化为研究算子作用到适当的一类简单的元上, 而这些元又以某种方便的形式生成整个空间的话, 那么这些问题就可以用很直接而容易的技术来解决”. 当这些“简单的元”是三角函数e^{ikx}时, 在L^2上有界的, 并且在这个三角函数系下是对角线化的算子, 一般地说,

除了由定义所保证的平移不变性外，没有任何令人感兴趣的性质．因此重要的是对算子 T 的特征值施加足够精确的条件，以保证可以延拓这个算子到其它函数空间上去．这个方向上的第一个结果是由 Marcinkiewicz 得到的．

但是，在小波基上精确对角线形的算子或近似对角线化的算子构成了 L^2 上有界算子的一个代数 A，用著名的 **Calderon** 和 **Zygmund 的实变方法**可以把 A 中的算子延拓到其它函数空间上去．这个代数 A 在很自然的意义上延拓了伪微分算子，并且它是严格地包含在 A. Calderon 已研究过的算子集合 C 中．A. Calderon 的研究工作导致了复分析和偏微分方程中若干问题的解决．

这里对集合 C 作一点更精细的说明．它的微妙结构寓于我们称之为"Calderon 计划"之中．在与 Zygmund 合作发现了那些可以归之于经典伪微分算子演算的东西之后，A. Calderon 自己打算尽可能减弱为有效地使用这个算法所必要的正则性条件，以系统地扩展应用领域．

在最少正则性条件的研究中，Calderon 奠基性的并且是令人出乎意料的发现是：存在着一个界限．存在一个人们不能超越的"自然边界"．在这个范围之内，算子的延拓不过是某个 Banach 空间上全纯函数的解析延拓．我们将在第Ⅷ章证明它．

本书第Ⅶ章到第Ⅺ章研究 Calderon 计划中算子集合 C 的构造．我们把它叫做 **Calderon－Zygmund 算子**，虽然它很不同于 Calderon 和 Zygmund 在 50－60 年代曾研究过的"历史上的算子"．

完全同这些"历史上的算子"一样，我们将要讨论的算子在某种新的意义上可以借助于奇异积分来定义．我们将在第Ⅶ章仔细讨论它．为了不仅限于考虑卷积算子的情形，必须给出 L^2 连续性的判别准则．缺了它，这个理论就会象沙滩上的城堡一样倒塌下来．这个判别准则之一就是 David 和 Journé 的重要的

$T(1)$ 定理. 我们将在第Ⅷ章证明它. $T(1)$ 定理代替了 Fourier 变换, 而使用 Fourier 变换本质上只限于卷积算子.

尽管 $T(1)$ 定理是充分必要条件, 然而不幸的是它还不能直接用到最令人感兴趣的 Calderon 计划里的集合 C 中的算子上去. 我们不知道这是为什么. 然而这些算子具有很特殊的非线性结构, 正确地了解非线性, 我们就可以从借助于 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理而得到的"局部性"结果过渡到有效地执行 Calderon 计划所要求的"整体性"定理.

在本书的第Ⅲ卷及第Ⅱ卷的第Ⅸ章, 我们将介绍 Caideron 计划的最优美的应用. 首先是 Calderon 的著名的精确伪微分演算, 它现在对非线性偏微分方程有着很有意义的应用.

然后我们回到复平面上与 Lipschitz 域有关的 Hardy 空间和复分析的讨论. 第Ⅶ章的课题是研究可求长曲线上的 Cauchy 算子. 接下来讨论 Kato 问题, 即确定增殖的二阶微分算子的平方根算子的定义域.

往后我们介绍 B. Dahlberg, D. Jerison, C. Kenig 和 G. Verchota 关于 Lipschitz 域上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题.

最后, 本书以简短介绍 J. M. Bony 的仿微分算子而结束. 仿微分算子可用于分析非线性偏微分方程.

小波以突然的方式作为某个伪微分算子的特征值再次出现. 经过正确地改写, 它又出现在 Lipschitz 曲线上 Hardy 空间和 Cauchy 算子的研究中. 这个算子在为这种曲线上的复分析而构造的一组特殊的小波基下是"几乎对角线化的" (第Ⅺ章). 为适应各种几何情形而构造小波基是足够灵活的. 实际上, 不存在一种可以用来分析所有 Calderon 的 C 集合的算子的普遍适用的基.

J. O. Strömberg 是对任意整数 m 构造出 $L^2(\mathbb{R})$ 的形如 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ ($j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$) 的一组正交基的第一个人. 这里函数 $\psi(x)$ 属于 C^m, 并且它在无穷远处是指数下降的.

以后的关于小波正交基的工作没有走 Strömberg 的路，它本质上属于 I. Daubechies, P. G. Lemarié, S. Mallat 和作者本人这些工作已仔细地给出了完整的证明.

至于算子，Calderon, Zygmund 和 Cotlar 的重要结果将在第 Ⅶ 章中用由集合 C 所构造的一种新的方式来讲述.

读者在阅读本书后半部分时，经常遇到的是下列各位的名字：J. M. Bony, G. David, P. Jones, J. L. Journé, C. Kenig, T. Murai 和 S. Semmes.

本书分为三卷是为使它适应各类读者. 如我已经指出的，人们可以仅读第 Ⅰ 卷，它是关于小波实际知识的要点. 然而读者亦可直接进入第 Ⅱ 卷（Calderon－Zygmund 算子）而仅仅从前六章各章的引言中去认识小波. 最后，读者可以毫不犹豫地进入第 Ⅲ 卷的第 XII 章、第 XIII 章、第 XIV 章和第 XV 章，因为它们中的每一章都是独立的、结构紧密的课题（复分析、Banach 空间上全纯泛函、Kato 理论、Lipschitz 域上椭圆偏微分方程、以及非线性偏微分方程）. 而联系这些不同课题的线索则显然是小波在 Calderon 计划中的算子理论的运用.

本书的水平适用于法国攻读第三阶段博士第一年的学生. 我们已在法国和美国各类工程师和数学家中试用过它. 本书作为讲义不要求预先学过 E. M. Stein 的〔217〕以及 E. M. Stein 和 G. Weiss 合著的〔221〕这些名著，也不要求学过 Carcia Cuerva 和 Rubio de Francia 的书〔115〕，但请不要忘记 Zygmund 写的基本参考书〔239〕.

R. Coifman 曾帮助我认识到 Calderon 计划的重要性. 自从 1974 夏，我们一直合作致力于实现这个计划. 本书是我们计划的一部分. 如果说本著作与它一开始的样子相比变化颇多的话，这完全要归功于我们的真诚与热忱的相互交流，归功于年轻的探索者们对问题给出了比我们的预想漂亮得多的解答.

第Ⅰ章　Fourier 级数与 Fourier 积分，滤波与取样

1. 引　言

现在可以用小波级数更有效地、更简单地分析函数或分布，这以前是用 Fourier 积分或 Fourier 级数来进行研究的．然而，小波分析不能完全取代 Fourier 分析．事实上，Fourier 分析对构造小波分析中不可缺少的小波正交基起了很大的作用．为构造小波基，人们应用了许多 Fourier 分析中的有效手法，比如它的代数形式．一旦小波被构造出来，就可以很好地用于那些领域，其中，如果用 Fourier 级数或积分来解决问题就要求很高的技巧，或是很繁琐的数值计算．

这两种分析看来更多是互相补充而不是互相排斥的．具备 Fourier 分析基本知识的读者阅读本书是不会失望的．

在第Ⅰ章中，我们收集了 Fourier 分析的经典的公式和定理．同样，本章也是本书论题（《小波和算子》）的开始，本书标题大家已知道了．

2. Fourier 级数

Fourier 级数用于分析 2π 为周期的函数或分布．我们首先考虑一个实变量的情况并假设周期是 2π．

我们从表现最好的函数开始．设 H 表示 Hilbert 空间 $L^2(0, 2\pi)$，它带有共轭双线性形式 $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$．那么函

数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ $(k\in\mathbb{Z})$就构成了 H 的一组 Hilbert 基．把模稍微改变一下，我们定义 $f\in H$ 的系数是

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,e^{-ikx}dx. \tag{2.1}$$

这样在 H 的收敛意义上，有

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k\,e^{ikx}. \tag{2.2}$$

等式 (2.2) 自动地给出了 $f\in L^2(0,2\pi)$ 到整个实直线的一个延拓．这个延拓在 $[0,2\pi]$ 上的限制恰恰就是函数 $f(x)$，并且它具有周期 2π．区间 $[0,2\pi)$ 对离散子群 $2\pi\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ 是基本的定义域．周期是 2π 的（局部）平方可和函数等同于 $L^2(0,2\pi)$ 的函数．同样的说明适用于稍后将要谈到的空间 $L^p(0,2\pi)$．这个说明不适用于周期为 2π 的分布空间 $F\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R})$．$\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是无穷次可微并且具有紧支集的函数空间，而 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 上连续线性泛函构成的空间．如果对任何 $u,v\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 且 $v(x)=u(x-2\pi)$ 都有 $\langle S,u\rangle=\langle S,v\rangle$，则称 $S\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 是周期为 2π 的．我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示试验函数与分布之间配对的双线性形式．2π 为周期的分布不是用它在开区间 $(0,2\pi)$ 上的限制来刻划的，因为那样我们就失去了一些信息．一个例子是如下定义的 "Dirac 梳子"：

$$S=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{2k\pi} \tag{2.3}$$

其中 δ_a 表示在 a 点有 Dirac 质量．S 在开区间 $(0,2\pi)$ 的限制是 0．同样地，我们不限制 S 于闭区间 $[0,2\pi]$．显然，不能用 Fourier 公式来定义一个周期为 2π 的分布的 Fourier 系数．我们用下面的方法绕过这个困难．设 E 是无穷次可微并且以 2π 为周期的函数组成的向量空间．如果对任意 $S\in F$, $f\in E$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$,

有

$$\langle S, f\rangle = \langle S, \varphi f\rangle, \tag{2.4}$$

其中

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+2k\pi) = 1 \tag{2.5}$$

成立，则称 E 与 F 是共轭的．在某种意义上，这样的函数 φ 就象 $[0, 2\pi)$ 上的特征函数一样．(2.4) 右边的项由于 $\varphi f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 而有定义．这样也就定义了 (2.4) 的左边．

验证 (2.4) 式不因 φ 的选择而改变是一个练习．作减法后，我们运用等价类，模掉的是 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$，它满足

$$\sum_{-\infty}^{\infty} g(x+2k\pi) = 0 \tag{2.6}$$

和存在 $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$，使得

$$g(x) = h(x+2\pi) - h(x). \tag{2.7}$$

作为 (2.4) 的一种特殊情况，我们来定义任一个周期为 2π 的分布 S 的 Fourier 系数 c_k $(k \in \mathbb{Z})$．设 $e_k(x) = e^{ikx}$, $\overline{e_k}(x) = e^{-ikx}$，定义

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\langle S, \overline{e_k}\rangle. \tag{2.8}$$

这时对某个整数 $m \in \mathbb{N}$ 和某个常数 c，有 $|c_k| \leqslant c(1+|k|)^m$．这个性质刻划了周期是 2π 的分布的 Fourier 系数．最后，

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_k. \tag{2.9}$$

(2.9) 式右边的级数是在分布意义下收敛的．这表明：如果 $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是一个试验函数，则

$$\langle S, \overline{u}\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad d_k = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-ikx} dx. \tag{2.10}$$

(2.10) 式右边的级数是绝对收敛的，这是因为 d_k 在无穷远是速

降的.

在 (2.9) 式中，同样可以使用 E 与 F 之间的共轭性来代替 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 与 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 之间的共轭性.

如果 $f \in E$, 即 f 是一个无穷次可微且以 2π 为周期的函数，设 d_k ($k \in \mathbb{Z}$) 是（由 (2.8) 式定义的）Fourier 系数，则

$$\langle S, \bar{f} \rangle = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} \tag{2.11}$$

这个等式就是 Plancherel 公式.

对 (2.9) 式逐项求导，就可得到（在分布意义上的）导数的 Fourier 级数.

下面给出这个法则的两个典型的应用.

从"锯齿波"函数 $s(x)$ 出发，它是周期为 2π 的奇函数，它在 $[0, 2\pi)$ 上等于 $\frac{\pi - x}{2}$. $s(x) \in L^2[0, 2\pi)$，我们有

$$s(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx . \tag{2.12}$$

在对 (2.12) 逐项求导之前，先看看周期为 2π 的函数 $s(x)$ 的完整的图象是有益的. 显然，这个函数在点 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处间断. 然后在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 的分布意义上逐项微分. $s(x)$ 的导数是普通导数（常数 1/2）与 πS 的和（其中 S 是 Dirac 梳子），而右边的项是 $\sum_{1}^{\infty} \cos nx$. 于是，

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} , \tag{2.13}$$

这就是 Poisson 求和公式.

这种讨论还有另一个有趣的应用. 从周期为 2π 的偶函数 $c(x) = \log \frac{1}{|\sin x/2|}$ 出发，其中 log 是自然对数. 又 $c(x)$ 属于 $L^2(0, 2\pi)$，它的 Fourier 级数是

$$\log \frac{1}{|\sin x/2|} = \log 2 + \sum_1^\infty \frac{1}{n} \cos nx . \tag{2.14}$$

这里有一个初步的注，它将在第Ⅵ章被进一步讨论.

设：H: $L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$ 是由 $H(e^{ikx}) = -i \operatorname{sign} k \cdot e^{ikx}$ 与 $H(1)=0$ 定义的算子. 换言之，$H(\cos kx) = \sin kx$ ($k \in \mathbb{N}$) 及 $H(\sin kx) = -\cos kx$ ($k \geq 1$).

算子 H 称为 Hilbert 变换. 显然，它是 $L^2(0, 2\pi)$ 连续的，但不一定是 $L^\infty(0, 2\pi)$ 连续的. 事实上，函数 $s(x) \in L^\infty(0, 2\pi)$，函数 $c(x)$ 不属于 L^∞，而这两个函数有关系 $H(s)(x) = -c(x) + \log 2$. 我们将在第Ⅵ章研究 Calderon－Zygmund 算子的 $(L^\infty$, BMO) 连续性时再来解释这个现象，而 H 是 Calderon－Zygmund 算子的原型.

(2.14) 还有另一个注. 由于 log(x)（在分布意义上的）导数是分布 V. P. $\frac{1}{x}$，$\log \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$ 的导数是周期为 2π 的分布 $\frac{1}{2}$ V. P. $\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$，它的奇性发生在点 $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处，并且它与 V. P. $\frac{1}{2k\pi - x}$ 有同样的形式. 事实上，在 $2k\pi$ 的邻域，这两个分布的差是一个无穷次可微的函数.

对 (2.14) 在分布意义下求导，得到

$$\text{V. P. } \operatorname{cotg} x/2 = \sum_{-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sign} k e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} H(e^{ikx}) . \tag{2.15}$$

这个新的等式有一个重要的解释：算子 H 是用与分布 $S = \frac{1}{2\pi}$ V. P. $\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ 作卷积来定义的. 两个周期为 2π 的分布的卷

积定义为 $S*T=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ikx}$，其中 $S=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, $T=\sum_{-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$. 这个定义又扩展了通常两个周期为 2π 的 $L^1(0, 2\pi)$ 函数的卷积 $f*g$，这个卷积由下式定义:

$$(f*g)(x)=\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,dy, \tag{2.16}$$

其中，右边的 f 以 2π 为周期延拓到 $\mathbb{R}$.

周期为 2π 的分布构成的向量空间 F 应是一个拓扑代数，其中乘积是用卷积来定义的. 这个代数的单位元是 Dirac 梳子

$\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{2k\pi}=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}$. 最后，如果 $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{ikx}$，我们有

$$\begin{aligned}H(f) &= \sum_{-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sign} k\alpha_k e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\ \text{V. P. cotg}\ x/2*f \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant x} f(x-y)\operatorname{cotg} y/2\, dy.\end{aligned}$$

我们已经看到算子 H 已经表为一个奇异积分，这种观点将在第Ⅶ章被系统地发展.

用 Fourier 级数分析 $L^p[0, 2\pi]$，比起在空间 E, F 以及 $L^2[0, 2\pi]$ 上的分析更微妙.

设 $1<p<\infty$，一个函数 $f\in L^p[0, 2\pi]$ 的 Fourier 级数的部分和 $\sum_{-M}^{N}c_k e^{ikx}$ 在 L^p 模下收敛于 f. 这是由于 Hilbert 变换 H 在 $L^p[0, 2\pi](1<p<\infty)$ 上是连续的. 这个变换在 L^1 以及周期是 2π 的连续函数空间上都不再是连续的. 结果是部分和收敛定理在 $p=1$ 或 $p=\infty$ 时不再正确.

f 的 L^p 模不能仅由 f 的 Fourier 系数的大小来估计. 这些系数的位相起着不可缺少的作用. 这里有两个例子.

设 $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2<\infty$，那末对几乎所有的 ± 号选择（它们是独立的．中心 Bernoulli 变量），变号的 Fourier 级数 $\sum \pm c_k e^{ikx}$ 收敛到一个函数，它属于所有的 L^p 空间（$2\leqslant p<\infty$）．然而条件 $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2<\infty$ 仅仅蕴含着（以一定方式）$\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}\in L^p$ ($p=2$)．对符号所做的选择使该级数升到 L^p 空间去了．

考虑一个特殊的级数 $\sum_{1}^{\infty}k^{-\alpha}e^{ikx}$ ($\frac{1}{2}<\alpha<1$)．它的和是周期为 2π 的函数 $f_\alpha(x)$，它限制到 $[-\pi,\pi]$ 上除原点外是连续的．如果 x 从正方向趋于 0，$f(x)$ 等于 $c(\alpha)x^{-1+\alpha}$，其中 $c(\alpha)$ 是一个非零复常数．当且仅当 $p(1-\alpha)<1$ 时，$f_\alpha(x)$ 属于 $L^p[0,2\pi]$．然而，相应的变号级数 $\sum_{1}^{\infty}\pm k^{-\alpha}e^{ikx}$（几乎一定地）定义了一个连续函数（同样地，如果 $\beta<\alpha-\frac{1}{2}$，则它是 β 阶 Hölder 函数）．著名的 Brown 运动与随机的 Fourier 级数有关（〔149〕）．

当人们想计算一个函数的 L^p 模时，对每个 Fourier 系数的准确了解只提供了一种虚幻的精确性．人们用精确分析所有的 Fourier 系数的方法大大地推进了分析，但可能走得太远了．应该回过头来，把级数组成二进块，而在二进块内部则不再进行分析．函数 f 的 Fourier 级数的二进块是

$$\Delta_j f(x)=\sum_{2^j\leqslant|k|<2^{j+1}}c_k e^{ikx},\quad (j\in\mathbb{N}),\tag{2.17}$$

Littlewood 和 Paley 的基本结果是：如果 $1<p<\infty$，则 $\|f\|_{L^p}$ 与 $|c_0|+\|(\sum_{0}^{\infty}|\Delta_j f(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$ 是等价模．这表明，要不影响 L^p

模，所能够做的系数符号的改变只能对二进块 $\Delta_j f$ 进行．当 $\sum_0^\infty \Delta_j f \in L^p$ 时，则 $\sum_0^\infty \varepsilon_j \Delta_j f\ (\varepsilon_j = \pm 1)$ 同样也属于 L^p.

把一个函数的 Fourier 级数分解成二进块，在 Hölder 空间 C^α 中同样起着本质作用．然而定义一个更好的算子 Δ_j 将是方便的．为此，从一个函数 $\psi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 出发，它是偶函数，支在 $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{3}{2}$ 上，且满足当 $|x| \geqslant 1$ 时，$1 = \psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{4}) + \cdots\cdots$．然后定义 Δ_j 为

$$\Delta_j f\ (x) = \sum \psi(k2^{-j})\ c_k e^{ikx}\ . \tag{2.18}$$

于是，对所有 $\alpha > 0$, $f \in C^\alpha$, 当且仅当 $\|\Delta_j f\|_\infty = O\ (2^{-j\alpha})\ (j \to +\infty)$．请记住，当 $0 < \alpha < 1$ 时，Hölder 空间是由周期为 2π 的，连续模 $\omega(h) = O(h^\alpha)$ 的连续函数组成．当 $\alpha = 1$ 时, $\|\Delta_j f\|_\infty = O\ (2^{-j})$ 等价于 $f \in \Lambda_*$，而不是 $f \in C^1$，其中 Zygmund 类 Λ_* 是由满足 $|f\ (x+y) + f\ (x-y) - 2f\ (x)| \leqslant C|y|$（任意实数 x, 及 $0 \leqslant y \leqslant 1$）的周期为 2π 的连续函数组成的 Banach 空间．当 $1 < \alpha \leqslant 2$ 时，空间 C^α 是包含在通常的 C^1 空间中的，定义为 $f' \in C^{\alpha-1}$（其中 f' 是 f 的导函数）. 对 $\alpha > 2$ 依此类推.

（一般说来），一个 C^α 函数的 Fourier 级数部分和不依 C^α 模收敛于该函数，也不是依 C^α 模一致有界的．对 C^0 模或 L^1 模也是如此（C^0 模就是一致模）.

人们用求和法来补救．我们给出 Borel 方法的例子．不用部分和 $\sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}$ 来逼近级数 $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$，而用 $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \exp\ (-|k|\ \varepsilon)\ e^{ikx}$ 来作逼近．然后令 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$．这就是作 Fourier 系数为 c_k 的函数与逼等逼近 P_ε 的卷积．确切地说，首先延拓 $f(x)$ 成为一个 2π 为周期的函数或分布．设 $P_\varepsilon\ (x) = \frac{1}{\varepsilon}\ P\ (\frac{x}{\varepsilon})$，其中 $P(x) = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+x^2}$.
其次，如果 $f(x)$ 是连续的（周期为 2π），则 $f * P_\varepsilon$ 一致收敛于

$f(x)$. 当$f(x)$局部可积时也一样.

也经常使用很多其它的恒等逼近，希望了解这方面内容的读者可参阅〔239〕.

3. Fourier 积分

我们从定义"朴素的"Fourier 积分开始，这就是 $L^1(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 积分，这时直接定义

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx \quad (-\infty<\xi<\infty). \tag{3.1}$$

不难证明，$\hat{f}(\xi)$ 是 ξ 的连续函数且它在 ∞ 取 0 值.

两个 $L^1(\mathbb{R})$ 的函数 f 与 g 的卷积是 $L^1(\mathbb{R})$ 的函数 h，且 $\hat{h}(\xi)=\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$. 因此 $L^1(\mathbb{R})$ 的函数的 Fourier 变换构成了$C_0(\mathbb{R})$ 代数的一个子代数. 该子代数称为 Wiener 代数，记为 $A(\mathbb{R})$. 如果设 $\|\hat{f}\|_A=\|f\|_1$，那么它是一个 Banach 代数.

这个 Wiener 代数看来简单，却仍很神秘. 有兴趣的读者可参阅〔148〕或〔209〕.

从 (3.1) 很容易得到的一个性质:

$$\int \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi=\int f(x)\, \hat{g}(x)\, dx. \tag{3.2}$$

应用 Fubini 定理于 $\iint e^{-ix\xi} f(x)\, g(\xi)\, dx d\xi$，便很简单地推出了 (3.2).

本书将系统地使用以下注释.

引理 1 设 $f(x)\in L^1(\mathbb{R})$. 对 $T>0$，设 $g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+k_T)$.

则 $g(x)\in L^1[0, T]$，且 g 的 Fourier 系数 $c_k=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)$

• $\exp(-2\pi ikx/T)\,dx$ 由 f 的 Fourier 变换 $c_k=\frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right)$ 给出.

应用 Fubini 定理，注意到子群 $T\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ 的基本定义域是 $[0, T)$，便立即得出此引理.

作为引理 1 的应用，我们介绍逆 Fourier 变换公式的一个证明（可以在物理书中找到）. 设 $f(x)$ 和 $\hat{f}(\xi)$ 是连续的，并且在无穷远处分别是 $O(x^{-2})$ 与 $O(\xi^{-2})$. 则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.3}$$

为此，应用引理 1, $g(x)$ 是连续函数，因为定义它的级数是一致收敛的. $g(x)$ 的 Fourier 系数是 $O(k^{-2})$，因此 $g(x)$ 是它的 Fourier 级数的和. 我们又有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}f(x+kT)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right)\exp\left(i\frac{2k\pi x}{T}\right). \tag{3.4}$$

至此，固定 x 让 T 趋于无穷，视 (3.4) 右边为 Riemann 和，就得到了 (3.3).

物理学家的观点是把在无穷远处为 $O(x^{-2})$ 的连续函数看成是周期为无穷的周期函数!

满足以上假设的一个特殊情形是 f 属 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. 这意味着对所有整数 $m\geqslant 1$ 和所有 $n\geqslant 0$, $f(x)$ 的 n 阶导数满足 $f^{(n)}(x)=O(x^{-m})$ $(|x|\to\infty)$. 于是由简单的计算（和号下求导与分部积分），可以验证只要 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ 也属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

于是，当 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 时，(3.3) 成立. 由此得出 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 等价于 $\hat{f}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，以及得出 $\mathscr{F}$: $\mathscr{S}(\mathbb{R})\to\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 是一个拓扑同构；其中 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换.

可以用 (3.2) 定义一个分布的 Fourier 变换. 人们认为对所有 $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，$\langle\hat{f}, g\rangle$ 的意义是由 $\langle f, \hat{g}\rangle$ 给出的. 换言之，$\mathscr{F}$: $\mathscr{S}'(\mathbb{R})\to\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{F}$: $\mathscr{S}(\mathbb{R})\to\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 的转置.

一个重要的特殊情况是具有紧支集分布的 Fourier 变换. 此时, 可以直接定义函数 $\hat{S}(\xi)$ 为 $\langle S, \overline{e_\xi}\rangle$, 其中 $e_\xi = e^{ix\xi}$.

当 S 是支集含于 $[-l, l]$ 的分布时, $\hat{S}(\xi)$ 可以由 Paley－Wiener 定理来刻划. $\hat{S}(\xi)$ 可以延拓成整个复平面的整函数 $F(z)$, 它满足: 对所有 $\varepsilon>0$, $|F(z)|\leqslant C(\varepsilon)\exp((l+\varepsilon)|z|)$. 此外, $F(\xi)=\hat{S}(\xi)$ 在实轴上是缓增的, 即存在整数 m, 使得 $|F(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^m$.

缓分布的一个例子是: f 是周期为 2π 的函数, 它在 $[0, 2\pi]$ 上的限制属于 $L^1[0, 2\pi]$. 则 f 在分布意义上的 Fourier 变换由下式给出.

$$\hat{f}=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} c_k\delta_k\text{, 其中 } c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \tag{3.5}$$

而 δ_k 是在点 k 处的 Dirac 质量.

让我们再回到 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 的定义. 由等式 (3.2) 和 (3.3), 知 $(\hat{f}, \hat{g})=2\pi(f, g)$, 其中 f 和 g 属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; 定义 $(f, g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\, dx$, 由此得出 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}$: $\mathscr{S}(\mathbb{R})\rightarrow\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 就是保范映射, 但这时 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 应带有 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Hilbert 结构所诱导的预 Hilbert 结构. 因为 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 这个保范映射可以延拓到 $L^2(\mathbb{R})$ 上去.

当 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 时, 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f(x)\, dx$ 将定义为截断积分 $\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi}f(x)\, dx=g_T(\xi)$ 依 L^2 模的极限.

C. Kenig 使用著名的 Carleson 定理证明了: 当 $T\rightarrow+\infty$ 时, 截断积分几乎处处收敛于 $\hat{f}(\xi)$. 可参阅〔161〕.

4. 滤波与取样

由于技术上明显的理由，人们要分析的信号的频谱是限于一个“带子”$[-T, T]$上的．记住，数学上的频率称为信号，它可以简单地归结于应用公式 $\cos\omega t=\frac{1}{2}\cdot(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$ 及 $\sin\omega t=\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$ $(\varepsilon>0)$．重要的是从信号的频率不超过 T 这一事实而得到所有的结论．这是本节的目的．我们将首先研究信号的取样．即我们将给出一个标准，用它来决定对于这样的信号，是否取样 $f(k\delta)$ $(\delta>0,\ k\in\mathbb{Z})$ 足以确定信号的其它部分．然后将给出公式，在“Shannon 条件”被满足时，它可以用这些取样重新构造这个信号．

开场白后，我们来做确切的数学叙述．对所有的 $T>0$，用 ε_T 表示由分布 $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 组成的向量空间，其 Fourier 变换是支在 $[-T, T]$ 上的．

由 Fourier 反演公式得到 $\hat{S}(\xi)=2\pi f(-\xi)$，其中 $\hat{S}(\xi)$ 是指数型整函数在实轴上的限制，它就是 $f(\xi)$ 本身．特别地，f 是无穷次可微的，因而在实轴上是连续的；于是取样 $f(k\delta)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 有意义．

下述论断给出了基本问题的回答．

定理 1　当 $\delta>\pi T^{-1}$ 时，取样 $f(k\delta)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 不能确定 $f\in\varepsilon_T$ 尽管可以假设 $f(\delta k)$ 速降而我们要找的函数属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$．

当 $\delta=\pi T^{-1}$ 时，取样 $f(k\delta)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 可以在假设 $f(k\delta)\in l^p(\mathbb{Z})$ $(1<p<\infty)$ 及假设 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 的条件下确定 $f\in\varepsilon_T$．如果 $p=\infty$，而 c_k $(k\in\mathbb{Z})$ 是 $l^\infty(\mathbb{Z})$ 中的序列，则不能断定存在 $f\in\varepsilon_T$，它属于

L^∞ 并且满足 $f(k\delta)=c_k$ $(k \in \mathbb{Z})$；而即使存在，也没有唯一性. 如果 $c_k \in l^1(\mathbb{Z})$ $(k \in \mathbb{Z})$，那么，（一般说来）不一定存在 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \varepsilon_T$，使得 $f(k\delta)=c_k$ $(k \in \mathbb{Z})$；但如果存在的话，则一定是唯一的.

最后，当 $0<\delta<\pi T^{-1}$ 时，若记 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 是其 Fourier 变换支于 $[-\pi\delta^{-1}, \pi\delta^{-1}]$ 且在区间 $[-T, T]$ 上等于 1 的函数，则存在 $f \in \varepsilon_T$，满足

$$f(k\delta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{\varphi}\,(x-k\delta)\, dx \tag{4.1}$$

和

$$f(x)=\delta\sum_{-\infty}^{\infty} f(k\delta)\, \varphi\,(x-k\delta). \tag{4.2}$$

(4.1) 和 (4.2) 的意义是，似乎函数 $\delta^{\frac{1}{2}}\varphi\,(x-k\delta)$ 组成了空间 $V_T=L^2\cap\varepsilon_T$ 的一组正交基.

然而，如下三个理由使人不能满意：级数中的函数不属于 V_T，而属于稍大的空间 $V_{\pi\delta^{-1}}$，它们是线性相关的，而不是彼此正交的. 在第Ⅱ章中我们将介绍怎样定义 V_T 与 $V_{\pi\delta^{-1}}$ 的“中间空间”，对它来说，存在 $h>0$，使得函数 $h^{\frac{1}{2}}\varphi\,(x-kh)$ 构成了这个中间空间的正交基.

再回到定理 1. 它的证明基于紧支分布周期化的概念. 用 E_δ 表示由无穷次可微、周期为 $2\pi\delta^{-1}$ 的函数构成的向量空间；这样，第 2 节中的空间 E 现在称为 E_1. 空间 E_δ 的拓扑共轭是周期为 $2\pi\delta^{-1}$ 的分布的空间 F_δ（如在第 2 节中，E 的共轭是 F). 设 S 是 $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ 中一个有紧支集的分布. 我们用下面的条件定义 S 的周期化 $\pi_\delta(S)=\sigma$；对所有的 $f \in E_\delta$，$\langle\sigma, f\rangle = \langle S, f\rangle$.

同样还要求条件：如果 $f(x)=\exp ik\delta x$，那么对所有 $k \in \mathbb{Z}$，

$$\hat{\sigma}(k\delta)=\frac{\delta}{2\pi}\hat{S}\,(k\delta).$$

为定义 σ，最后一件事是：级数 $\sigma(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{S}\ (k\delta)\exp ik\delta x$ 在分布意义下收敛于 σ.

最后来验证：如果 S 是 L^1 中有紧支集的函数，我们刚刚引入的分布周期化概念与引理 1 所定义的概念相同．

再回到定理 1. 想法是从支于 $[-T, T]$ 的分布 $S=\hat{f}$ 出发. 于是 $\hat{S}\ (k\delta)=2\pi f\ (-k\delta)$，这样提出的问题变成了用 $\sigma=\pi_\delta(S)$ 定义 S.

如果 S 支集的长度比周期大，信号处理专家们称之为“混淆”的现象就出现了. 即在“S 模掉 $2\pi\delta^{-1}$ 之后的块”之间存在着互相交叠．沿此方向继续走，就容易证明定理 1 的第一个论断. 设 ε 是一个充分小的实数，使得 $\pi\delta^{-1}+\varepsilon\leqslant T$ 及 $\varepsilon\leqslant\pi\delta^{-1}$. 设 $\hat{\theta}\ (\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是支于 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 上的一个函数. 令 $S=\hat{f}=\hat{\theta}(\xi-\pi\delta^{-1})-\hat{\theta}\ (\xi+\pi\delta^{-1})$. 或回到 f 来说，$f\ (x)=-2i\sin\ (\pi\delta^{-1}x)\cdot\theta(x)$. 于是 $f\in\varepsilon_T\cap\mathscr{S}(\mathbb{R})$，并且它在 $\delta\mathbb{Z}$ 上是零.

以同样的精神，我们考虑 $T<\pi\delta^{-1}$ 的情形. 这时不再有混淆. 事实上，设 $S_k\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 S 平移 $2k\pi\delta^{-1}$; 我们有 $\sigma=\sum_{-\infty}^{\infty}S_k$，且 S_k 的支集是彼此不相交的区间 $[2k\pi\delta^{-1}-T, 2k\pi\delta^{-1}+T]$. 于是有 $S=S_0=\hat{\varphi}\sigma$. 这就导致了 (4.2).

验证 (4.1) 更简单．把 Parseval 公式用到 (4.1) 的右端，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\ (\xi)\ e^{ik\delta\xi}\overline{\hat{\varphi}}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\ (\xi)\ e^{ik\delta\xi}\,d\xi=f\ (k\delta).$$

还剩下验证极端情形 $\pi\delta^{-1}=T$. 一开始，我们设 f 属于 $V_T=L^2\cap\varepsilon_T$. 这时序列 $\delta f\ (-k\delta)\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 $\hat{f}\in L^2\ [-\pi\delta^{-1}, \pi\delta^{-1}]$ 的 Fourier 系数的序列. 自然，我们在这里不区别 $\hat{f}$ 与它的 $2\pi\delta^{-1}$ 的周期化，因为我们考虑的是 L^2 情形.

因此，$\hat{f}(\xi)=\delta\chi(\xi)\sum_{-\infty}^{\infty}f(k\delta)\exp(-ik\delta x)$，其中 $\chi(\xi)$ 是区间 $[-\pi\delta^{-1}, \pi\delta^{-1}]$ 的特征函数．做逆变换，得到

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}f(k\delta)\frac{\sin\pi\delta^{-1}(x-k\delta)}{\pi\delta^{-1}(x-k\delta)}. \tag{4.3}$$

函数 $L_k(x)=\dfrac{\sin\pi\delta^{-1}(x-k\delta)}{\pi\delta^{-1}(x-k\delta)}$ 叫做基本正弦，而函数 $\delta^{-\frac{1}{2}}L_k(x)$ 构成了 V_T 的正交基．这表明：联系正规取样 $\delta^{\frac{1}{2}}f(k\delta)$ 与函数 $f\in V_T$ 的映射是一个保范同构．

考虑 $L^p(1<p<\infty)$ 的情形．我们将首先证明，只要 $f\in L^p\cap\varepsilon_T$，而不必假设 $T>0$ 与 $\delta>0$ 有什么关系，$f(k\delta)$ 就属于 $l^p(\mathbb{Z})$．事实上，设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，$\varphi$ 的 Fourier 变换在 $[-T, T]$ 上等于 1，就得到了（4.1）．由 Hölder 不等式有

$$|f(k\delta)|^p\leqslant\left(\int|f(x)|^p|\varphi(x-k\delta)|dx\right)\|\varphi\|_1^{p/q}.$$

为得到结论只需加起这些不等式并注意到，由于 φ 的速降性，$\sum_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x-k\delta)|\leqslant C_0$ 成立．

反之，从任意序列 $c_k\in l^p(\mathbb{Z})$ 出发，我们想构造一个函数 $f\in L^p\cap\varepsilon_T\ (T=\pi\delta^{-1})$，使得 $f(k\delta)=c_k\ (k\in\mathbb{Z})$．

使用等式（4.3），然而不再有一个方法来证明，只要 $c_k\in l^p(\mathbb{Z})$，就有 $\sum_{-\infty}^{\infty}c_kL_k(x)$ 属于 $L^p(\mathbb{R})$．首先，来看看什么是这个"好方法"．如果我们承认（4.2），其中 φ 是一个在无穷远速降的函数，由 Hölder 不等式

$$|f(x)|^p\leqslant\left(\sum|\varphi(x-k\delta)|\right)^{p/q}\delta^p\sum_{-\infty}^{\infty}|f(k\delta)|^p|\varphi(x-k\delta)|.$$

为了得到结论，还要求 $\sum_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x-k\delta)|\leqslant C_0$，以及 $\|\varphi\|_1=C_1$是有限的．显然，$\frac{\sin x}{x}\notin L^1(\mathbb{R})$，因此这种方法不适用．然而，这种方法还是有价值的；它向我们指出，因为我们有 $\delta/2<\pi\delta^{-1}=T$，充分地只要证明对 $f\in E_T$ $(T=\pi\delta^{-1})$，$\sum_{-\infty}^{\infty}|f(k\delta/2)|^p\leqslant c\sum_{-\infty}^{\infty}|f(k\delta)|^p$ 成立．这点我们以后在适当时候再提．使用 (4.3)，再用将在第Ⅶ 章中证明的下面的定理 2．就可以得到结论了．

定理 2 矩阵 $M=((k-l)^{-1})_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2}$ (它在对角线上取值 0) 定义了从 $l^p(\mathbb{Z})$ 到 $l^p(\mathbb{Z})$ 的线性连续算子 $(1<p<\infty)$．

这个算子称为离散的 Hilbert 变换．

它是离散的卷积算子，它的 L^2 连续性以如下方法建立：设 $y_j=\sum'\frac{1}{j-k}x_k$，其中 $\sum'$ 表示求和中没有 $j=k$ 的项，于是

$$\sum_{-\infty}^{\infty}y_je^{ijx}=\sum\sum'\frac{1}{j-k}x_ke^{i(j-k)x}e^{ikx}=m(x)f(x),$$

其中，

$$m(x)=2i\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin jx}{j}\quad \text{et}\quad f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}x_ke^{ikx}.$$

去掉因子 $2i$，函数 $m(x)$ 是锯齿波函数，因此有 $\|m\|_\infty=\pi$．H 在 $l^2(\mathbb{Z})$ 上的连续性等价于用 $m(x)$ 逐点相乘的乘子算子在 $L^2[0,2\pi]$ 上的连续性，而后者因为 $m(x)\in l^\infty[0,2\pi]$ 是显然的．

自然，不能用这种方法建立 H 在 $l^p(\mathbb{Z})$ 的连续性，其中 $p\in(1,\infty)$ 但 $p\neq2$．在第Ⅶ 章，我们将讨论一般的定理．

如果不用矩阵 $(1/(j-k))$ 而使用矩阵 $(1/|j-k|)$，所得的

算子不是 $L^2(\mathbb{Z})$ 连续的，事实上，计算表明，这时将有

$$m(x)=2\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos jx}{j}=2\log 2-2\log\frac{1}{|\sin x/2|}$$

这次，它不再属于 $L^\infty[0,2\pi]$ 了.

我们将来使用定理 2 的时候，矩阵将是 $(-1)^k(\sin\pi l/2)(l-2k)^{-1}$，其中 $l\in 2\mathbb{Z}+1$（对由它在 $k\delta$ $(k\in\mathbb{Z})$ 处取样所得出的信号在 $l\delta/2$ 处再取样）. 于是它是作用于限制在 $2\mathbb{Z}$ 序列上而在 $l=2k+1$ 处取值的离散的 Hilbert 变换，因子 $(-1)^k\sin\pi l/2$ 在估计中不起任何作用，因而可以被忽略.

显然，上述事实在 $p=1$ 与 $p=\infty$ 时不再成立. 事实上，假设矩阵 $m(j,k)$ 在 $l^1(\mathbb{Z})$ 中有界，那么必存在一个常数 C，使得 $\sum_j|m(j,k)|\leqslant C$ 对 k 一致地成立. 而这个矩阵可以从信号在 $k\delta$ 处的值来计算在 $j\delta/2$ 处的值，这个条件不被满足.

同样，矩阵在 $l^\infty(\mathbb{Z})$ 上有界性这次是由 $\sum_k|m(j,k)|\leqslant c$ 对 j 一致地成立来刻划的. 我们所讨论的算子也不满足这个条件.

我们以经典的 S. Bernstein 不等式结束本节. 这里，我们以某种不十分确切的形式给出它. 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$，恒有 $\|f'\|_p\leqslant CT\|f\|_p$. 事实上，常数 C 等于 1. 为证明它，再回到 (4.1) 的证明. 用 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示一个在 $[-1,1]$ 上等于 1 的 Schwartz 类函数. 设 $\varphi_T(x)=T\varphi(Tx)$. 于是 φ_T 的 Fourier 变换是 $\hat{\varphi}_T(\xi)=\hat{\varphi}(T^{-1}\xi)$；对所有 $f\in\varepsilon_T$ 的函数，有 $f=f*\varphi_T$. 由这个等式，$f'=f*\varphi'_T$ 及 $\|f'\|_p\leqslant\|f\|_p\|\varphi'_T\|_1$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 然而 $\varphi'_T(x)=T^2\varphi'(Tx)$，于是得到 Bernstein 不等式并且 $C=\|\varphi'\|_1$.

建议读者参考〔148〕，其中证明了 $C=1$；并可参阅〔2〕，那里揭示了 Bernstein 定理与放大器构造的联系.

另一个 Bernstein 不等式讲了从 f 的 L^p 模出发来计算 f 的 L^q 模，其中 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$. 使用 Hausdorf－Young 不等式.

$$\|f * g\|_w \leqslant \|f\|_u \|g\|_v, \tag{4.4}$$

其中 $1 \leqslant u \leqslant \infty$, $1 \leqslant v \leqslant \infty$, $1 \leqslant w \leqslant \infty$ 且 $1+\frac{1}{w}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$.

令 $w=q$, $u=p$, 使用此不等式，就应有 $\frac{1}{v}=1+\frac{1}{p}-\frac{1}{w}$.

取 $g=\varphi_T$, 最后得到

$$\|f\|_q \leqslant CT^{1/p-1/q}\|f\|_p. \tag{4.5}$$

它的 n 维类似如下：设 f 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 并且它的 Fourier 变换支于球 $|\xi| \leqslant R$, 则

$$\|\nabla f\|_p \leqslant R\|f\|_p, \quad 当\ 1 \leqslant p \leqslant \infty;$$

$$\|f\|_q \leqslant CR^{n(1/p-1/q)}\|f\|_p, \quad 当\ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty.$$

5. Lusin 和 Calderon 工作中的小波

我们可以发现，“小波”最早出现在 Lusin 30 年代的工作中．事实上，在用著名的 Lusin 面积积分来刻划 $\mathbb{H}^p$ 空间时，如果使用 Coifman 和 Weiss 的原子分解，那么我们已经见到了小波的原型．

现在我们来说得更确切些．P 表示开的上半平面，它是由 $z=x+iy$ $(y>0)$ 来定义的．当 $f(x+iy)$ 在上半平面全纯并且满足

$$\sup_{y>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}<\infty, \tag{5.1}$$

那么它属于 $\mathbb{H}^p(\mathbb{R})$.

仅考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情形，这时 (5.1) 左边的数就是 f 在 $\mathbb{H}^p$ 中的模．

Lusin 的工作在于用积分表示 $f(z)=\iint_P (z-\bar{\zeta})^{-2}\ \alpha(\zeta)\, du\, dv$ 来分析与综合函数．其中 $\zeta=u+iv$, 而 $\alpha(\zeta)$ 是 P 上一个可测函数，它在边界上满足一定的增长条件．

我们首先看到，（当 $\zeta\in P$时） 每个函数 $(z-\bar{\zeta})^{-2}$ 显然属于 $\mathbb{H}^p$.

用下面的“装配法则”就得到了综合. 我们从任一个可测函数 $\alpha(\zeta)$ 出发，作函数的二次型

$$A(x)=\left(\iint_{\Gamma(x)}|\alpha\ (u+iv)|^2v^{-2}\ du\ dv\right)^{1/2}, \tag{5.2}$$

其中 $\Gamma(x)=\{(u,\ v)\in\mathbb{R}^2,\ v>|u-x|\}$.

于是，如果 $1<p<\infty$，并且 $f(z)=\iint_P(z-\bar{\zeta})^{-2}\ \alpha^2\ (\zeta)\ du\ dv$，

我们有

$$\|f\|_p\leqslant C(p)\ \|A\|_p. \tag{5.3}$$

(5.3) 左边的项是 $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$，它同样也是由

(5.1)所定义的f在 $\mathbb{H}^p$ 中的模. (5.3) 右边的项是$\left(\int_{-\infty}^{\infty}(A(x))^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$.

这个估计可以是很粗的. 例如，如果 $f(z)=(z+i)^{-2}$，这样，$\alpha(\zeta)$就应选成点 i 处的 Dirac 质量，这时 (5.3) 右边是无穷的.

这个反常现象出自分解

$$f(z)=\iint_P(z-\bar{\zeta})^{-2}\alpha(\zeta)\ du\ dv \tag{5.4}$$

的不唯一性.

在〔71〕中，使 $A(x)$ 属于 $L^p(\mathbb{R})$ 的上半平面的可测函数 $\alpha(\zeta)$ 的空间是以帐篷空间的名义来讨论的.

在函数 $f(z)\in\mathbb{H}^p$ 的所有分解中，应优先考虑具有以下三条性质的分解：

a) f的系数 $\alpha(\zeta)$ 可以通过f来计算，这时 $(z-\bar{\zeta})^{-2}$ 好象构成

了 $\mathbb{H}^2$ 中的一组正交基；

b) 对如此算出的系数 $\alpha(\zeta)$, (5.3) 是模的等价关系；

c) 对所有 $f\in\mathbb{H}^p$ 的函数，都可以作这样好的分解.

我们将使用"量子力学中的固有态"的语言来验证这些性质(〔125〕). 为此，我们从函数 $\psi(t)=(t+i)^{-2}$ 出发. 这个函数由于它具有正则性、局部性以及振动性 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,dt=0$ 而为众所周知. 正因为如此，A. Grossmann 和 J. Morlet 称 $\psi(t)$ 是一个"小波"(在"某一时刻"作为波振动的"小波"，而由于它迅速衰减又是局部化的).

下面，我们设 $\psi(a,b)(t)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\dfrac{t-b}{a}\right)(a>0,\ b\in\mathbb{R})$；这个集合是(作用于 $\mathbb{H}^2$ 上的)仿射变换群的不可约的酉作用下 ψ 的轨道. 于是我们**可以使用 $\mathbb{H}^2$ 的函数 $\psi(a,b)$ 的集合作为 $\mathbb{H}^2$ 的一组正交基**. 即，若 $f\in\mathbb{H}^2$, 我们先来计算 f 的小波系数 $W(a,b)=(f,\psi_{(a,b)})$. 然后，我们再用小波 $\psi_{(a,b)}(x)$ 带上相应的系数叠加来重建 $f(x)$. 即，对所有的 $f\in\mathbb{H}^2$,

$$f(x)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(a,b)\psi_{(a,b)}(x)\,db\,\frac{da}{a^2}. \tag{5.5}$$

我们来计算系数 $W(a,b)$，用(5.4)的记号，有

$$W(a,b)=2\pi i a^{3/2}f'(b+ia). \tag{5.6}$$

因此我们得到 $\alpha(\zeta)=\dfrac{2i}{\pi}vf'(u+iv)$；而由(5.3)所得到的模的等价性就是著名的 $\mathbb{H}^p$ 函数的 Lusin 面积积分刻划.

直到 1965 年，在 $p=1$ 的情形，Calderon 证明了(5.3). 这个发现是涉及 $\mathbb{H}^1$ 的算子理论以及 $\mathbb{H}^1$ 与 BMO 共轭性相当多工作的出发点(〔109〕,〔217〕).

下面，探索"小波"的历史起源这件事又把我们带到了现被称之为著名的 Calderon 等式这里. 从一个积分值为零的，它的

Fourier 变换满足条件

$$\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t\zeta)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \ (\zeta \neq 0) \tag{5.7}$$

的，属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的函数 $\psi(x)$ 出发．例如，$\psi(x)$ 是充分正则的，很好局部化的，积分为零的径向函数，那么就存在一个常数 c，使 $c\psi(x)$ 满足 (5.7)．再设 $\psi_t = t^{-n}\psi(\frac{x}{t})$，设 $\psi_{(u,t)}(x) = t^{-n}\psi(\frac{x-u}{t})$．用 A. Grossmann 和 J. Morlet 的方法（〔90〕，〔124〕），用

$$\alpha(u, t) = (f, \psi^{\cdot}_{(u,t)}) \tag{5.8}$$

定义 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的"小波系数"．这时可以用

$$f(x) = \int_0^{\infty} \int_{R^n} \alpha(u, t)\psi_{(u,t)}(x)\, du \frac{dt}{t} \tag{5.9}$$

重建 $f(x)$．(5.9) 的一个等价形式是

$$I = \int_0^{\infty} Q_t Q_t^* \frac{dt}{t}, \tag{5.10}$$

其中，$Q_t(f) = f * \psi_t$，而 Q_t^* 是 Q_t 的共轭算子．Calderon 等式自然地就与经典的函数空间联系起来了，其方法是对〔217〕中所发现的调和扩张的梯度大小加上条件．

这时，P_t 是 Poisson 半群，$P_t f(x) = F(x, t)$ 在上半平面 $(t>0)$ 是调和的，满足 $F(x, 0) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$，它在无穷远处是零，最后还有 $Q_t = -t\frac{\partial}{\partial t} P_t$．

在公式 (5.8) 与 (5.9) 中，函数 $\psi_{(u,t)}(u \in \mathbb{R}^n, t>0)$ 就好象构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一组正交基．f 在这组基下分解的系数是由 (5.8) 给出的，而 (5.9) 式又用这些系数重建了 f．

是否可以用一组结构上满足同样代数法则的正交基 ψ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ 来代替由函数 $\psi_{(u,t)}(u \in \mathbb{R}^n, t>0)$ 所组成的累赘的集合呢？在第 II

章及第Ⅲ章中我们将看到：这是办得到的. Lusin, Calderon, Zygmund, Stein 和他们的后继者的工作有了新的意义，即正交基 ψ_λ ($\lambda \in \Lambda$) 是**无条件地，万能地**适用于除 L^1 和 L^∞ 之外的所有经典的函数空间，我们称之为无条件基.

第Ⅱ章　$L^2(\mathbb{R}^n)$ 的多分辨率分析

1. 引　言

小波正交基只是最近几年才出现的．然而类似的构造已在数学、理论物理、信号处理中用过了．

有趣的并且是令人惊讶的事情是，出现的这些构造几乎是同时诞生的（在 80 年代）．它们从场的构造论、从 Banach 空间几何学、甚至从 Elf－Aguitaine 小组在勘测中对收集信号的处理（J. Morlet 用反射来研究地震的工作）而得到．

这些不同学科的探索者们想发现一些好的算法，它可以用同时具有三角函数系与 Haar 系的优点的特殊函数来分解任意函数．这两个函数系在以下意义上占据了两个极端位置．三角系中的函数在频率上或在 Fourier 变量上是完全局部化的，但在空间变量上则没有任何局部化．相反地，Haar 系中的函数（在第Ⅲ章我们将再次提起这个定义）在空间变量上是完全局部化的（变量 x），然而对 Fourier 变量（变量 ξ）局部化则很坏．这是由于 Haar 系的两个缺点：缺乏正则性与缺乏振动性．

寻找关于空间变量与 Fourier 变量同时都好的 Hilbert 基是由 R. Balian（〔6〕）以如下方式发起的："在通讯理论中，人们对于在完全给定的时间内，把一个振动信号表示成由其中每一个都同时拥有足够确定的位置与有一个频率的小波的叠加这件事感兴趣．事实上，有用的信息常常同时被发射的频率与信号的时间结构（如音乐）所传递．当把一个信号表达成时间的函数时，其中的频谱表现并不好；相反地，信号的 Fourier 分析却显示不了信号每一分量发射的瞬时与持续时间．一个适当的表示应结合这两

种互补描述的优点，并用一个离散的刻划来表示，以适应通讯理论.”

为了得到小波正交基的（Fourier 变量和空间变量的）双重局部化，自然要先对 Fourier 变量作局部化，然后再对空间变量作局部化. 为使第二次局部化不致破坏第一次局部化，应当遵从 Heisenberg 测不准原理.

我们希望小波正交基（它是 L^2 空间的一组正交基）可以分析通常所使用的大部分函数空间. 因为这些函数空间以很简单的方式被 Littlewood－Paley 分析所刻划，这提醒我们用它来作要作的对 Fourier 变量（或对频率）的局部化.

在第 I 章中，已经讲过周期为 2π 的函数的 Littlewood－Paley 分析. 它可以写成

$$f=c_0+\sum_{0}^{\infty}\Delta_j(f) \tag{1.1}$$

上式对应着由二进区间 $\frac{1}{2}2^j<|k|<\frac{3}{2}2^j$ 所提供的指数尺度所作的频率的一个局部化（所用的尺度就是八度音程的尺度）. 但还没有对空间变量作任何局部化. 为此，我们想从二进块 $\Delta_j f$ 出发，使用单位分解，把它裁剪成“小包”，最后得到空间变量和 Fourier 变量同时都局部化了的块. Heisenberg 测不准原理告诉我们，我们的“小包”的尺寸不能比 2^{-j} 小. 这就导致了把 $\Delta_j(f)$ 分解成和式 $\sum\Delta_j(f)\ \varphi(2^jx-k)$，其中 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，并且 $\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-k)=1$(等式). 此外，还必须让 φ 的 Fourier 变换在区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$之外等于零. 这样，对空间变量所作的局部化没有过多地破坏由 Littlewood－Paley 分解所得到的关于频率的局部化.

这种方法不能创造“小波奇迹”. 在小波中出现的是 $\alpha(j,k)\cdot$

$2^{j/2}\psi(2^j x-k)$，而不是 $\Delta_j(f)\ \psi\ (2^j x-k)$. 其中 $\alpha(j,k)$ 是一个系数，ψ 是积分值为零的 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 中的函数（同样，人们可以假设 ψ 的各阶矩为零），它使得 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j-k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基；这个新的函数 $\psi(x)$ 不是可以用来定义算子 Δ_j 的函数.

这种有启发性的方法对于联系 Littlewood－Paley 分解与小波级数还是有价值的. 这可以表现在八度音程尺度在小波级数中所起的作用. 这件事可以让人预见到小波级数在函数空间分析中的功效，它有效地继承了 Littlewood－Paley 分解所给出的刻划.

然而，从传统的 Littlewood－Paley 分解出发，“小波奇迹”永远不会自动产生. 事实上，应用一个更简单更有效的方法去代替它. 这个方法叫做“多分辨率分析”. 多分辨率的概念可以调合对空间变量的分析与对 Fourier 变量的分析以使得它们与 Heisenberg 测不准原理相容. 确切地说，要用一列简单的函数 f_j 来逼近一个一般的函数，这些 f_j 的简单性表现在它可以具体地被写出并且很有规律，因为它们能完全地由 $\mathbb{R}^n$ 中网点 $\Gamma_j=2^{-j}\mathbb{Z}^n$ 上的取样所刻划. 这些函数 f_j 的规律表现在它的 Fourier 变换 $\hat{f}_j$ 本质上支于半径为 $C2^j$ 的球上. 尺度 2^{-j} 与相应球半径的关系几乎就是从 Heisenberg 测不准原理得到的结果.

多分辨率分析的大部分具体例子是从用于逐次逼近曲线的样条函数的嵌入序列出发的. 在第 II 章中我们叙述的理论包含着用样条函数来作逼近的典型结果，来作为一个特例.

然而，存在不能归于样条理论的多分辨分析的重要例子.

第 II 章的目的在于让读者熟悉多分辨率分析的概念. 我们将从 r 正则多分辨率分析出发，可以用 r 正则性分析正则性不超过 r 的所有函数或分布的空间.

用多分辨率分析构造小波将是第 III 章的内容.

2. 多分辨分析的定义. 例

现在，我们就给出主要定义，然后再解释它.

定义 1 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个多分辨率分析是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一列单调上升的子空间 V_j ($j \in \mathbb{Z}$)，它们具有以下性质：

$$\bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j=\{0\},\quad \bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ 中稠密；} \tag{2.1}$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall j \in \mathbb{Z},\ f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \text{ 成立；} \tag{2.2}$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0 \text{ 成立；} \tag{2.3}$$

存在一个函数 $g(x) \in V_0$，使得 $g(x-k)$ ($k \in \mathbb{Z}^n$) (2.4)

是空间 V_0 的一组 Riesz 基.

让我们回忆一下 Riesz 基的定义. 设 H 是一个 Hilbert 空间，设 $e_0, e_1, \cdots\cdots, e_k, \cdots\cdots$ 是 H 中的一列元. 如果存在两个常数 $C'>C>0$，使得对所有数列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots$，

$$C\left(\sum|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\|\sum \alpha_k e_k\right\| \leqslant C'\left(\sum|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

成立，且使 (2.5) 成立的有限和 $\sum \alpha_k e_k$ 在 H 中稠密，就称 $e_0, e_1, \cdots\cdots, e_k, \cdots\cdots$ 是 H 的一组 Riesz 基. 解释这两个条件的另一种方法是：如果存在一个同构但不必是等距的映射 T: $l^2(\mathbb{N}) \to H$，使得 $T(\varepsilon_k)=e_k$；我们用 ε_k 表示序列，它在第 k 项等于 1，其它项都是零.

定义 2 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个多分辨率分析 V_j ($j \in \mathbb{Z}$) 是 r 正则的 ($r \in \mathbb{N}$)，如果可以选择一个满足 (2.4) 的函数 $g(x)$，使得对所有多重指标 $\alpha=(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n)$ ($|\alpha| \leqslant r$) 及任意整数 $m \in \mathbb{N}$，

$$|\partial^\alpha g(x)| \leqslant C_m (1+|x|)^{-m} \tag{2.6}$$

成立．这里 $\partial^\alpha=(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\cdots\cdots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ 以及 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$．

多分辨率分析的**第一个例子**是一维 r 阶样条函数的嵌入空间，函数 $f\in V_j$ 的节点恰恰是在点 $k2^{-j}$ $(k\in\mathbb{Z})$．

让我们回忆一下 V_0 的定义．从一个整数 $r\in\mathbb{N}$ 出发，V_0 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个子空间，它由 C^{r-1} 类函数组成（当 $r=0$ 时，这个条件是不必要的），并限制到每个区间 $[k, k+1)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 上与一个阶数小于或等于 r 的多项式重合．然后用 (2.2) 来定义 V_j．我们可以立即验证性质 (2.1) 到 (2.4)．$g(x)$ 的一种可能的选择可以从 $[0, 1]$ 区间的特征函数 χ 的 r 次卷积 $\chi*\cdots*\chi$ 得到．如果 $r=0$，$\chi(x-k)$ 就是 V_0 的正交基．如果 $r\geqslant 1$，$g(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 形成了 V_0 的 Riesz 基．

当 $r=0$ 时，我们又回到二进鞅论的情形．多分辨率分析就作为鞅论（在函数方面但不是在集合方面）的变化．

下面是**第二个例子**，其中 Fourier 分析起了作用．这里，V_0 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间，它由 Fourier 变换支于 $[-\pi, \pi]$ 的函数 f 组成．于是 $g(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$，且 $g(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 构成了 V_0 的正交基．此外，$f\in V_0$ 在这组基下的系数就是取样 $f(k)$ $(k\in\mathbb{Z})$．这个例子不是 r 正则的多分辨率分析，因为 $g(x)$ 没有所必须的下降性．事实上，可以很容易地验证任何可能的 $g(x)$ 的选择都不具有性质 (2.6)．验证是很简单的，留给读者去做．

设 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个多分辨率分析，考虑 $\mathbb{R}^n$ 的一列网 $\Gamma_j=2^{-j}\mathbb{Z}^n$．我们定义**取样算子** T_j：$V_j\to l^2(\Gamma_j)$ 如下：如果 $j=0$，那么 $T_0\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_k g(x-k)\right)$ 是序列 $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$．如果 j 是其它某个整数，我们应定义 T_j 与 (2.2) 相容．即 T_j 作用到函数 $g(2^jx-k)$ 上应是 $l^2(\Gamma_j)$ 中的序列，它在第 $2^{-j}k$ 项等于 1，在其它项等于

0．所构造的序列 T_j 也依赖于 (2.4) 中的函数 $g(x)$．

在上述第二个例子中，作用于 $f \in V_j$ 的算子 T_j 在通常意义下是 f 在 $\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$ 上的限制．

第三个例子是第二个例子的修正．我们从一个实变量的函数 $\theta(\xi)$ 出发，它属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$，是偶函数，在 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上等于1，在 $[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 之外等于0．此外，还假设对所有 $\xi \in \mathbb{R}$, $\theta(\xi) \in [0, 1]$，以及当 $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$ 时，$\theta^2(\xi) + \theta^2(2\pi - \xi) = 1$.

用 $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 来表示其 Fourier 变换为 $\theta(\xi)$ 的函数．立即可以验证 $g(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的某闭子空间的正交基，我们记这个子空间为 V_0．事实上，作 Fourier 变换后，$\mathscr{F}V_0$ 是由 $m(\xi) \cdot \theta(\xi)$ 生成的向量空间，其中 $m(\xi)$ 是周期为 2π 的函数，它限制到 $[0, 2\pi)$ 时，$m(\xi) \in L^2[0, 2\pi)$．如果令 $g_1(\xi) = m_1(\xi)\theta(\xi)$，$g_2(\xi) = m_2(\xi)\theta(\xi)$，那么

$$(g_1, g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi)\overline{g}_2(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m_1(\xi)\overline{m}_2(\xi)\theta^2(\xi)\,d\xi = \int_0^{2\pi} m_1(\xi)\overline{m}_2(\xi)\,d\xi,$$

这是因为 $\sum_{-\infty}^{\infty}\theta^2(\xi + 2k\pi) = 1$．这就说明了为什么 $g(x-k)$ 是 V_0 的正交基．

接着，我们用 (2.2) 定义 V_1．应该证明 V_1 包含 V_0．由于 V_0 中的函数没有明显的几何描述，这件事并不显然（这与第一个例子中样条函数空间的情形自动成立不同)．然而 $\mathscr{F}V_1$ 是函数 $m_1(\xi) \cdot \theta(\xi/2)$ 的集合，其中 $m_1(\xi)$ 是一个周期为 4π 的函数．使用初等的观察：$\theta(\xi) = \lambda(\xi)\theta(\theta/2)$，其中可以让 $\lambda(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ 并且周期为 4π; 这里要好好处理 0/0 这种不定式．因此，$\mathscr{F}V_0$ 的函数 $m(\xi)\theta(\xi)$

属于 $\mathscr{F} V_1$.

这个例子满足多分辨分析的其它性质是不难验证的.

现在我们来看看高维的例子. **第四个例子**说明从 $L^2(\mathbb{R})$ 的多分辨率分析 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 出发，人们总可以构造 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个多分辨率分析 $V_j \hat{\otimes} V_j$.

与前面的例子一样，仅定义 $V_0 \hat{\otimes} V_0$. 这个 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 闭子空间的 Riesz 基由函数 $g(x-k)\,g(y-l)$ 组成，其中 $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, 于是 $V_0 \hat{\otimes} V_0$ 由（无穷）和

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha(k, l)g(x-k)g(y-l) \quad \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha(k, l)|^2<\infty\right)$$

组成.

因此可以立即得到多分辨率分析的其它性质.

在即将结束本节时，让我们回到第一个例子（r 阶样条）. 我们打算用 Fourier 变换研究它，这将在以下各章的计算中用到.

如果 $f \in V_0$, 那么 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 并且 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{r+1} f=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k\delta_k$, 其中 δ_k 是在 k 点的 Dirac 质量，又 $c_k \in l^2(\mathbb{Z})$. 反过来，这两个性质就刻划了 V_0. 用 Fourier 变换写出来，我们就有：对所有的 $f \in V_0$, $\xi^{r+1}\hat{f}(\xi)=q(\xi)$, 其中 $q(\xi)$ 是一个属于 $L^2(0, 2\pi)$ 的，周期为 2π 的函数. 我们也有 $\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, 由此得出 $m(\xi)=q(\xi)\cdot(1-e^{-i\xi})^{-r-1}$ 具有与 $q(\xi)$ 相同的性质（属于 $L^2(0, 2\pi)$ 并且以 2π 为周期）. 事实上，相差一个系数，在 0 点的邻域里 $m(\xi)$ 等价于 $\hat{f}(\xi)$.

最后，在作了 Fourier 变换之后，$\mathscr{F} V_0$ 是乘积 $m(\xi)\left(\dfrac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^{r+1}$ 的集合，其中 $m(\xi)$ 是周期为 2π 的，并且属于 $L^2(0, 2\pi)$ 的函数. 换言之，$\left[\dfrac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right]^{r+1}$ 起着第三个例子中 $\theta(\xi)$ 所起的作用.

注意到 $\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}$ 是 [0, 1] 区间特征函数 χ 的 Fourier 变换，知 $g=\chi * \cdots\cdots * \chi$ ($r+1$ 次) 的 Fourier 变换是 $\left(\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^{r+1}$，并且 $g(x-k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是 V_0 的一组 Riesz 基.

一个满足 $h \in V_0$, $h(0)=1$, $h(k)=0$ ($k \in \mathbb{Z}$, 且 $k\neq 0$) 的函数 h 称为 **Lagrange 样条**. 可以通过下面的引理来得到这样的函数.

引理 1　设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$，满足 $\hat{f}(0)=1$, $\hat{f}(k)=0$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k\neq 0$) 成立的充分必要条件是，

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)=\frac{1}{2\pi}.$$

在我们这里，

$$f(\xi)=\hat{h}(\xi)=m(\xi)\left(\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^{r+1} \in L^1(\mathbb{R}),$$

其中 $r\geq 1$，这是我们假设的．还应证明 $\sum_{-\infty}^{\infty} f(\xi+2k\pi)=\frac{1}{2\pi}$．这归结为计算级数 $\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi+2k\pi)^{-r-1}$．如果 r 是偶数，当 $\xi=\pi$ 时，这个级数的和是零．事实上这个级数的和是周期为 2π 的解析函数，它可以从对 $\operatorname{cotg}\frac{\xi}{2}$ 求 r 次导数得到．这时不能构造 Lagrange 样条．

相反地，如果 r 是奇数，函数 $(1-e^{-i\xi})^{r+1}\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi+2k\pi)^{-r-1}$ 是周期为 2π 的、实解析的，并且它在实轴上处处非零．因此，我们找到唯一的函数 $m_0(\xi)$，使得 $\hat{h}(\xi)=m_0(\xi)\left(\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^{r+1}$ 定义了一

个 Lagrange 样条 h . 此外，$m_0(\xi)$ 是处处非零的实解析函数. 因此，函数 $h(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 形成了 V_0 的一组 Riesz 基. 最后，对奇阶样条的多分辨率分析来说，取样算子 $T_j: V_j\to l^2(\Gamma_j)$ 应被定义为 V_j 中的函数在 $2^{-j}\mathbb{Z}$ 处的通常的限制算子. 这个性质对偶阶样条是不对的.

我们介绍下面几个概念就结束本节.

定义 3 如果 V_j 象第一个例子那样构造，则称 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 是 r 阶样条的多分辨率分析. 如果 V_j 按第三个例子构造，则称 $V_j(j\in\mathbb{Z})$ 为 Littlewood－Paley 型的多分辨率分析.

我们将很快解释后一个定义的理由.

我们将证明，可以用 r 正则多分辨率分析 $f_j\in V_j$ 来逼近（正则性不超过 r 的）函数或分布. 此外，很多函数空间可以简单地用差 $f_{j+1}-f_j$ 来刻划. 算子 $E_j: f\to f_j$ 事实上是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 V_j 上的正交投影算子. 这个算子在正则性指标不超过 r 的条件下可以延拓到通常的函数空间.

为构造算子 E_j，应找出 V_j 的一组简单的正交基. 这就是下面一节的内容.

3. Riesz 基与正交基

首先，让我们回忆一下从 Riesz 基 $e_k\in H$ $(k\in\mathbb{N})$ 构造 Hilbert 空间正交基的两种经典方法.

第一种方法是用基 e_k 的 Gram 矩阵 $G=(g(j,k))$ $((j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})$，其中 $g(j,k)=\langle e_j, e_k\rangle$，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是定义 Hilbert 空间的共轭双线性型.

引理 2 存在两个常数 $c_2\geq c_1>0$, 使得对任意数序列 $\xi_k(k\in\mathbb{N})$,

下式成立:

$$c_1\sum_0^\infty|\xi_k|^2\leqslant\sum_0^\infty\sum_0^\infty g(j,\ k)\xi_j\bar{\xi}_k\leqslant c_2\sum_0^\infty|\xi_k|^2. \tag{3.1}$$

换句话说，G是正定的．这是因为（3.1）中间一项恰恰就是$\|\sum_0^\infty \xi_k e_k\|^2$.

因此，根据正定矩阵的符号演算知存在矩阵$H=G^{-\frac{1}{2}}$，记H的系数是$\gamma\ (j\ ,\ k)\ (j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N})$.

引理 3 $f_j=\sum_0^\infty\gamma(j,k)e_k$构成 Hilbert 空间$H$上的正交基.

事实上，设$\varepsilon_k\ (k\in\mathbb{N})$为$H$的（任意）一组正交基；记$S:H\to H$是$H$上的同构，它定义为：$S(\varepsilon_k)=e_k\ (k\in\mathbb{N})$．那么，$g\ (j,k)=\langle S(\varepsilon_j),\ S(\varepsilon_k)\rangle=\langle S^\star S\ (\varepsilon_j),\ \varepsilon_k\rangle$．即$g\ (j,\ k)$是在正交基$\varepsilon_k$下算子$S^\star S$矩阵的系数．由此得出 $\gamma\ (j,\ k)$是矩阵$(S^\star S)^{-\frac{1}{2}}$在同一组基下的系数．此外还有$\sum_0^\infty\gamma(j,k)\varepsilon_k=(S^\star S)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_j$，以及

$$f_j=\sum_0^\infty\gamma(j,\ k)e_k=S\left(\sum_0^\infty\gamma(j,k)\varepsilon_k\right)=S(S^\star S)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_j.$$

注意到算子$S(S^\star S)^{-\frac{1}{2}}$是酉算子，引理 3 就被证明了.

为过渡到（构造同一正交基的）第二种算法，我们需要下面的引理.

引理 4 如果S是 Hilbert 空间H到本身的同构，那么

$$S(S^{\star}S)^{-\frac{1}{2}}=(SS^{\star})^{-\frac{1}{2}}S\ .$$

事实上，

$$B^{-1/2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(B+\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}d\lambda$$

对任何满足 $c_1I\leqslant B\leqslant c_2I$ 的算子 B 成立，其中 $c_2\geqslant c_1>0$．把这个等式用于 $B=S^{\star}S$．为得出结论只要注意到，对任意 $\lambda\geqslant 0$,

$$S(S^{\star}S+\lambda)^{-1}S^{-1}=(SS^{\star}+\lambda)^{-1}.$$

现在叙述第二种算法．从形式上由 $T(x)=\sum_0^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$ 定义的算子出发．为说明 T 的存在性，我们还是把 e_k 写成 $e_k=S(\varepsilon_k)$，其中 $S\colon H\to H$ 是一个同构，而 $\varepsilon_k\ (k\in\mathbb{N})$ 是 H 的一组正交基．因此 $\langle x,e_k\rangle e_k=S(\langle S^{\star}(x),\varepsilon_k\rangle\varepsilon_k)$，由此式立即就有 $T=SS^{\star}$. 故根据（有界）正定自共轭算子的符号演算知存在 $T^{-\frac{1}{2}}$；由引理 4, $T^{-\frac{1}{2}}(e_k)=f_k$.

与前面的 Gram－Schmit 算法比较，这种算法有把形如 $g(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 的 Riesz 序列变成具有同一结构的正交基的优点．另一方面，我们也可以忘记这段开场白而“顺便”证明以下定理，它给出了 V_0 的典型的正交基 $\varphi(x-k)\ (k\in\mathbb{Z}^n)$.

所用的记号同第 I 章，特别是，$\hat{f}(\xi)$ 总表示 f 的 Fourier 变换．

定理 1　设 $V_j\ (j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个多分辨率分析；那么存在两个常数 $c_2\geqslant c_1>0$，使得对几乎所有的 $\xi\in\mathbb{R}^n$，有

$$c_1\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{1/2}\leqslant c_2\ . \tag{3.2}$$

并且，如果用

$$\hat{\varphi}(\xi)=\hat{g}(\xi)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

定义 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$；那么 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 是 V_0 的一组正交基．

最后，设 f 是 V_0 中使得 $f(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 彼此正交的这样一个函数；那么该序列是 V_0 的一组正交基，并且有 $\hat{f}(\xi)=\theta(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$，其中 $\theta(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且对所有的 $k\in\mathbb{Z}^n$, $\theta(\xi+2k\pi)=\theta(\xi)$，又 $|\theta(\xi)|=1$ 几乎处处成立．

先证 (3.2)．由 (2.4) 与 (2.5)，

$$C(\sum|\alpha_k|^2)^{1/2}\leqslant\|\sum\alpha_k g(x-k)\|_2\leqslant C'(\sum|\alpha_k|^2)^{1/2}.$$

我们不再考虑有限的和 $\sum\alpha_k g(x-k)$．设 $m(\xi)=\sum\alpha_k e^{-ik\cdot\xi}$．应用 Plancherel 定理，上式变成

$$C\|m\|_2\leqslant\left(\int_{R^n}|m(\xi)|^2|\hat{g}(\xi)|^2\ d\xi\right)^{1/2}\leqslant C'\|m\|_2\ , \tag{3.4}$$

其中 $\|m\|_2=\left(\int_{Q_0}|m(\xi)|^2\ d\xi\right)^{1/2}$，而 $Q_0=([0,\ 2\pi))^n$．下面，设 $\omega(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2$，由 $\hat{g}\in L^2(\mathbb{R}^n)$，知 $\omega(\xi)\in L^1(Q_0)$，这样就可以把不等式 (3.4) 写成

$$C\|m\|_2\leqslant\left(\int_{Q_0}|m(\xi)|^2\omega(\xi)d\xi\right)^{1/2}\leqslant C'\|m\|_2 \tag{3.5}$$

并且如 $\omega(\xi)$ 一样，$|m(\xi)|^2$ 也是以 2π 为周期的．

现在，我们特别地选择 $m(\xi)$．为此设 $m(\xi)=m_N(\xi-\xi_0)$，其中 $m_N(\xi)=(2\pi N)^{-\frac{1}{2}}\sum_{0\leqslant k\leqslant N}e^{ik\cdot\xi}$．那么 $|m_N(\xi)|^2=k_N(\xi)$ 就是 Fejer 核，(3.5) 就非常简单地变成了 $C\leqslant(k_N*\omega)^{\frac{1}{2}}(\xi_0)\leqslant C'$．这里出现了两个周期函数的卷积．当 N 趋向于无穷时，$(k_N*\omega)(\xi_0)$ 几乎处处趋向于 $\omega(\xi_0)$，这就证明了 (3.2)．

下面证明定理 1 的第二个结论．首先我们看到

$$\mathscr{F} V_0=\{m(\xi)\hat{g}(\xi)\ ;\ m \in L^2(Q_0)\}, \tag{3.6}$$

其中 $\mathscr{F}$ 表示 Foutier 变换．这时我们有：

引理 5 把 $f(x)=\sum \alpha_k\ g\ (x-k)$ 映成 $m(\xi)\,(\omega(\xi))^{\frac{1}{2}}$ 的算子 U: $V_0 \to L^2\,(Q_0, |Q_0|^{-1}d\xi)$ 是一个等距同构．

事实上，如果定义 $f(x)$ 的和是有限的，那么

$$\begin{aligned}\|f\|_2 &= (2\pi)^{-n/2}\left(\int|\hat{f}\ (\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\\ &= |Q_0|^{-1/2}\left(\int|m(\xi)|^2|\hat{g}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\\ &= |Q_0|^{-1/2}\left(\int_{Q_0}|m(\xi)|^2\omega(\xi)d\xi\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

可以把这个等式完全直接地延拓到 V_0 上．此外，U 还是满的．事实上，因为 $0<c_1^2\leqslant\omega(\xi)\leqslant c_2^2$，函数 $g(\xi)$ 属于 $L^2(Q_0, |Q_0|^{-1}d\xi)$，总可以写成 $m(\xi)\,(\omega(\xi)\,)^{\frac{1}{2}}$，其中 $m(\xi)=\sum \alpha_k e^{-ik\xi}$ 并且有 $\sum|\alpha_k|^2<\infty$，这就保证了构造 $f \in V_0$．

保范映射 U 有性质：$U\tau_k=\chi_k U$，其中 τ_k 是平移 k 的算子，而 χ_k 是用 $e^{-ik\xi}$ 去作乘法的算子．

为构造 V_0 的正交基 $\varphi(x-k)\ (k \in \mathbb{Z}^n)$，只需用 U 来变换这些基，这就归结为寻找 $L^2\ (Q_0, |Q_0|^{-1}d\xi)$ 的形如 $\chi_k U(\varphi)$ 的正交基．最简单的选择是让 $U(\varphi)=1$，即 $m(\xi)=(\omega(\xi))^{-\frac{1}{2}}$ 或 $\hat{\varphi}(\xi)=(\omega(\xi)\,)^{-\frac{1}{2}}\hat{g}(\xi)$，这我们已经见过．用完全同样的方法可得到定理 1 的第三个结论．

最后我们将证明，本节最初介绍的方法也导致同一结果．事实上，该算法有以下好处：它作用于向量 e_k，就给出向量 f_k．当它作用到向量 $U(e_k)$ 上，它将给出向量 $U(f_k)$，而 U 是保范的．在

这里，e_k 是函数 $g(x-k)$，而 $U(e_k)$ 是函数 $\chi_k(\omega(\xi))^{\frac{1}{2}}$，在 $L^2(Q_0, |Q_0|^{-1}d\xi)$ 中它是便于归范正交化的. 因此，一开始我们称之为 T 的算子就可以定义为

$$T(f)(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\ e^{-ik\cdot\xi}\ (\omega(\xi))^{1/2}\ ,$$

其中

$$c_k=|Q_0|^{-1}\int_{Q_0} f(\xi)\,(\omega(\xi))^{1/2}e^{ik\cdot\xi}d\xi.$$

这是很简单的，把 $\sqrt{\omega}\,f$ 写成 Fourier 级数，然后再用 $\sqrt{\omega}$ 去乘. 于是 $T(f)=\omega f$, 并且 $T^{-\frac{1}{2}}(\chi_k\omega^{\frac{1}{2}})=\chi_k$，这我们已讲过了.

4. 函数 φ 的正则性

现在假设多分辨率分析是 r 正则的，则有以下基本结果.

定理 2 设 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析，则由 $\hat{\varphi}(\xi)=\hat{g}(\xi)\left(\sum|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 定义的 $\varphi\in V_0$ 对所有满足 $|\alpha|<r$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}$，对所有的 $m\in\mathbb{N}$，满足

$$|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant C_m(1+|x|)^{-m}\ . \tag{4.1}$$

这个定理的证明需要 Sobolev 空间 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 的几个很简单的性质.

$f\in H^m(\mathbb{R}^n)$ $(m\in\mathbb{N})$，当且仅当 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，并且在分布意义上取的 $|\alpha|\leqslant m$ 的各阶导数 $\partial^\alpha f$ 仍属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$；f 在 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 中的模是 $\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha f\|_2^2\right)^{1/2}$.

设 $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是一个紧支集的 C^∞ 函数，满足 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\chi(\xi - k)| \geq 1$. 那么我们可以把“整体的” H^m 模的计算变成在点 k ($k \in \mathbb{Z}^n$) 周围的“局部的” H^m 模的计算.

引理 6 设 $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$，则序列 $\omega(k) = \|f(\xi)\chi(\xi - k)\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ 属于 $l^2(\mathbb{Z}^n)$. 反之，如果 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，且 $\omega(k) \in l^2(\mathbb{Z}^n)$，则 $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

把 Leibniz 公式用到乘积 $f(\xi)\varphi(\xi - k)$ 上去，然后请注意到 L^2 模可以通过 l^2 模局部化这个性质，就立即证明了此引理.

引理 7 对所有整数 $m \in \mathbb{N}$，如果 $|g(x)| \leqslant C_m(1 + |x|)^{-m}$，则 $(\sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2)^{\frac{1}{2}}$ 是一个无穷次可微的函数.

事实上，对任意整数，$\int |g(x)|^2 (1 + |x|^2)^m dx < \infty$，从而对所有的 m，$\hat{g}(\xi) \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

使用 Sobolev 嵌入定理：$H^m \subset C^{m - \frac{n}{2}}$，这里不必准确定义 Hölder 空间 C^r，只要用不太精确的包含关系 $H^m \subset C^{m - \frac{n}{2} - \varepsilon}$ (n 是一个偶数，而 $\varepsilon > 0$) 就够了. 设 $s = m - \dfrac{n}{2} - \varepsilon$，由引理 6，对所有的 $s \in \mathbb{N}$，$\sum \|\hat{g}(\xi)\chi(\xi - k)\|_{C^s}^2 < \infty$ 成立.

这说明，级数 $\sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ 以及它的直到 s 阶导数，在任何紧集上一致收敛. 因为 s 是任意的，引理 7 就被证明了.

我们知道，$(\sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant C > 0$. 由此就知道它的倒数

同样是无穷次可微的并且可以写成 $\sum\alpha_k e^{ik\cdot\xi}$ 的形式，其中 α_k 是速降的系数．因此有 $\hat{\varphi}(\xi)=(\sum\alpha_k e^{ik\cdot\xi})\hat{g}(\xi)$，这就给出了 $\varphi(x)=\sum\alpha_k g(x+k)$．于是也就立即得到了 $\varphi(x)$ 的正则性及下降性．

下面几点注解导致了在第 6 节及第 10 节要做的计算．

首先指出，用简单的尺度变化可以验证 $2^{nj/2}\varphi(2^jx-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 构成了空间 V_j 的正交基．

其次，从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 V_j 上的投影算子 E_j 由下式给出：

$$E_jf(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha(j, k)\varphi(2^jx-k), \tag{4.2}$$

其中

$$\alpha(j, k)=2^{nj}\int f(y)\overline{\varphi}(2^jy-k)dy. \tag{4.3}$$

在第 10 节中我们将证明，总可以找到 φ，使它的积分值等于 1，这样，在 $\mathbb{R}^n$ 上恒有 $\sum\varphi(x-k)=1$．

因此，从数值分析的观点看，(4.2) 与 (4.3) 的两个算子，每一个都具有重要意义．我们将在第 11 节讨论它们．

(4.3) 式的积分实际上是 f 在点 $k(k\in\mathbb{Z}^n)$ 以尺度 2^{-j} 作平均值．**这些平均值可以使 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 在网 $\Gamma_j=2^{-j}\mathbb{Z}^n$ 上取样．**

(4.2) 式则是从取样出发作**外推**．人们要构造一个尽可能简单的函数 f_j，它在 Γ_j 上与 f 有相同的取样．这后一条件恰恰是由 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 构成正交列这件事保证的．

由 (4.3) 式定义的取样算子 T_j 与我们在定义 1 后所引入的概念是不同的．

5. Bernstein 不等式

刚刚讨论的函数 φ 的性质，允许我们把 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的多分辨率分析推广到其它函数的情形．

我们考虑一个指标 $p\in[1, +\infty]$ 并试图用 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 代替

$L^2(\mathbb{R}^n)$. 下面的引理讨论这件事.

引理 8 设 φ 是定理 2 中的函数，则存在两个常数 $c_2>c_1>0$，使得对任意 $p\in[1,+\infty]$，对所有有限的和 $f(x)=\sum\alpha(k)\cdot\varphi(x-k)$，有

$$c_1\|f\|_p\leqslant\left(\sum|\alpha(k)|^p\right)^{1/p}\leqslant c_2\|f\|_p. \tag{5.1}$$

让我们从极端情形开始，设 $p=\infty$，那么

$$|f(x)|\leqslant\sum|\alpha(k)|\ |\varphi(x-k)|\leqslant\sup_k\ |\alpha(k)|C(\varphi),$$

其中，

$$C(\varphi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sum|\varphi(x-k)|.$$

反之，由 $\alpha(k)=\int f(x)\overline{\varphi}(x-k)dx$，知 $|\alpha(k)|\leqslant\|f\|_\infty\|\varphi\|_1$.

$p=1$ 的情形是类似的，请读者自己去做.

为讨论一般情形，设 q 与 p 是共轭指标. 改写 $|\varphi(x-k)|=|\varphi(x-k)|^{\frac{1}{p}}|\varphi(x-k)|^{\frac{1}{q}}$，这导致了 $|f(x)|\leqslant\sum|\alpha(k)|\ |\varphi(x-k)|\leqslant\left(\sum|\alpha(k)|^p\cdot|\varphi(x-k)|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|\varphi(x-k)|\right)^{\frac{1}{q}}$. 注意到与上面一样, $C(\varphi)$ 是有限的，就立即得到了(5.1)中左边的不等式. 下面从 $\alpha(k)=\int f(x)\overline{\varphi}(x-k)\,dx$ 出发来证明右边的不等式. 我们有

$$|\alpha(k)|\leqslant\|\varphi\|_1\left(\int|f(x)|^p\ |\varphi(x-k)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

然后就得到 (5.1) 右边的不等式了.

这个引理让我们在 $1\leqslant p\leqslant2$ 时定义 $V_0(p)$ 为交集 $V_0\cap L^p$，在 $2\leqslant p<\infty$ 时定义 $V_0(p)$ 为 V_0 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 模下的完备化.

由这个引理，$f \in V_0(p)$ 当且仅当

$$f(x)=\sum \alpha(k)\varphi(x-k) \qquad (\alpha(k) \in l^p(\mathbb{Z}^n)).$$

定义 $V_0(\infty)$ 是一个向量空间，它的元 f 可以写成 $f(x)=\lim f_m(x)$，其中 $f_m \in V_0$，而极限过程在任何紧集上是一致的，还要求 $\sup\limits_{m\geq 0}\|f_m\|_\infty<\infty$. 换言之，$f \in V_0(\infty)$，当且仅当

$$f(x)=\sum \alpha(k)\varphi(x-k)，\text{其中 } \alpha(k) \in l^\infty(\mathbb{Z}^n).$$

最后，我们简单地用尺度变化定义 $V_j(p)$：

$$f(x) \in V_0(p) \Leftrightarrow f(2^jx) \in V_j(p),$$

并认为 $V_j(p)$ 好象浸入在 $L^p(\mathbb{R})$ 中，

我们将证明 $V_j(p)$ 在下面意义上是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的一个逼近：如果 E_j 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 V_j 上的正交投影算子，则对任何 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$E_j(f)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 f，并且也是几乎处处收敛的. 如果 $p=+\infty$，则 $E_j(f)$ 在拓扑 $\sigma(L^\infty, L^1)$ 下收敛到 f，该拓扑是由 L^∞ 与 L^1 的共轭性定义的.

现在已经可以叙述并证明“Bernstein 不等式”了.

定理 3 设 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r 正则多分辨率分析，则存在一个常数 C，使得对 $1\leq p\leq\infty$, $j \in \mathbb{Z}$, $f \in V_j(p)$，当 $|\alpha|\leq r$ 时，有

$$\|\partial^\alpha f\|_p\leq C2^{|\alpha|j}\|f\|_p. \tag{5.2}$$

为证明 (5.2)，用一个简单的变量替换，可归结为 $j=0$ 的情形. 设 $f=\sum \xi(k)\varphi(x-k)$，则 $|\partial^\alpha f(x)|\leq\sum|\xi(k)|\,|\partial^\alpha\varphi(x-k)|$. 再次应用引理 8 左边不等式证明的推理，就得到 $\|\partial^\alpha f\|_p\leq C(\sum|\xi(k)|^p)^{\frac{1}{p}}$，再用引理 8 右边的不等式就能控制它了.

让我们回忆一下什么是经典的 Bernstein 不等式. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq p\leq\infty)$，它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 支在球 $|\xi|\leq R$ 内.

那么，f是无穷次可微的，并且对任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，

$$\|\partial^\alpha f\|_p \leqslant R^{|\alpha|}\|f\|_p . \tag{5.3}$$

用一个显然的变量替换可以归结为 $R=1$ 的情形．然后对 $|\alpha|$ 用归纳法来证明 (5.3)．于是所要验证的就是

$$\|\partial/\partial x_1 f\|_p \leqslant \|f\|_p, \tag{5.4}$$

只要 f的 Fourier 变换的支集包含在单位球内．

为证明 (5.4)，只考虑一维情形就够了．一般情形可以使用 Fubini 定理．

于是问题变成证明当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，且 f的 Fourier 变换支于 $[-1, 1]$ 时，有

$$\|f'(x)\|_p \leqslant \|f\|_p . \tag{5.5}$$

证明的思想是，对这样的函数，有 $f'(x)=f * \mu(x)$，其中 μ 是一个总质量等于 1 的测度．为证明这个等式，记 $\sigma(\xi)$ 是一个周期为 4 的奇函数，它在 $[-1, 1]$ 上等于 ξ．测度 μ 是一个位于 $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 处点质量的和，点质量相应于 $i\sigma(\xi)$ 的 Fourier 系数．这时可立即验证 $\|\mu\|=1$(〔148〕)．

6. 算子 E_j 满足的一个重要恒等式

设 V_j ($j \in \mathbb{Z}$) 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个多分辨率分析．我们想证明这个多分辨率分析可以用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 外的其它函数的情形．为此必须更精确地了解 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的正交投影算子 E_j．在所有可以明显写出 E_j 的情形（第 2 节的例 1 和例 3），E_j 的核也容易计算．事实上，我们有

$$E_j(x, y)=2^{nj}E(2^jx, 2^jy), \quad E(x, y)=\sum \varphi(x-k)\ \overline{\varphi}(y-k).$$

因此，我们从用第 4 节的算法计算 φ 开始，推导出 $E(x, y)$ 的一个准确表达式．这样，就可以直接验证下面定理 4 的结论了．

仅对多分辨率分析的例 1 和例 3 感兴趣的读者，可以跳过定理 4 的证明而仅仅知道它的结论，即对所有阶数不超过 r 的多项式 p, $E_j(P)=P$ $(j\in\mathbb{Z})$ 成立.

本节自始至终，假设 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析. 我们不再要求其它条件.

既然函数 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 构成了 V_0 的一组正交基. $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 V_0 上的正交投影算子 E_0 就是

$$E_0 f(x)=\int E(x, y)f(y)dy, \tag{6.1}$$

其中,

$$E(x, y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-k)\overline{\varphi}(y-k).$$

由此立即得到以下性质: 对任意 $m\in\mathbb{N}$, $|\alpha|\leqslant r$, $|\beta|\leqslant r$,

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta E(x, y)|\leqslant C_m(1+|x-y|)^{-m}; \tag{6.2}$$

和

$$E(x+k, y+k)=E(x, y)\quad (k\in\mathbb{Z}^n). \tag{6.3}$$

此外，由简单的变量替换，立刻知 E_j 的核是 $2^{nj}E(2^j x, 2^j y)$.

我们知道，当 $j\to+\infty$ 时，对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 依 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 模 $E_j(f)\to f$. 为了对许多其它函数空间建立类似的结果，我们要讨论下面的基本结论.

定理 4 袭用以上记号，对于满足 $|\alpha|\leqslant r$ 的多重指标 α, 有

$$\int E(x, y)y^\alpha\, dy=x^\alpha. \tag{6.4}$$

为证明 (6.4)，我们第一次在本章使用包含关系 $V_0\subset V_j$ $(j\in\mathbb{N})$. 用正交投影算子的语言来说，就是等式 $E_0=E_jE_0$, 用算子的核来表示就是

$$E(x, y)=2^{nj}\int E(2^jx, 2^ju)E(u, y)\, du. \qquad (6.5)$$

从 $r=0$ 的情形开始证明.

函数 $E(x, y)$ 属于 L^∞ $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 并且对 $m\in\mathbb{N}$, 满足 $|E(x, y)|\leqslant C_m(1+|x-y|)^{-m}$. 我们令

$$m_0(x)=\int E\ (x, y)\ dy,$$

由 (6.3) 知它是 $\mathbb{Z}^n$ 周期的.

再在 (6.5) 右边让 $j\to\infty$, 我们将使用以下结论.

引理 9 对所有的 $y\in\mathbb{R}^n$, 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\lim_{j\uparrow+\infty}\left\{2^{nj}\int E(2^jx, 2^ju)E(u, y)du-m_0(2^jx)E(x, y)\right\}=0. \qquad (6.6)$$

我们先承认这个结果来看看有什么结论. 由 (6.5), 对所有的 $y\in\mathbb{R}^n$, 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\lim_{j\uparrow\infty}(1-m_0(2^jx))E(x, y)=0$$

成立. 对 $f\in V_0$, 可以积分此式, 然后用 Lebesque 控制收敛定理, 得到对任何 $f\in V_0$,

$$\lim_{j\uparrow\infty}m_0(2^jx)f\ (x)=f\ (x)$$

成立. 通过简单的变量替换, 当 $f\in V_{j_0}$ $(j_0\geqslant0)$ 时, 也有同样的结论.

因为 $m_0\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 这个收敛依 L^2 $(\mathbb{R}^n)$ 模成立. 最后根据稠密性, 对所有 $f\in L^2$ $(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\lim_{j\uparrow\infty}m_0\ (2^jx)\ f\ (x)=f\ (x).$$

如果 $f\,(x)$ 是立体 $[0, 1)^n$ 的特征函数, 就有

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |m_0\ (2^j x)-1|^2\ dx=0\ .$$

又根据 m_0 的周期性，这个积分不依赖于 $j \in \mathbb{N}$，我们就得到定理所述的 $m_0\ (x)=1$.

还剩下证明引理 9. 它的证明要用到函数 $f \in L^1_{loc}\ (\mathbb{R}^n)$ 的 Lebesque 点的概念. 如果

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|y| \leqslant r} |f\ (x_0+y)-f\ (x_0)|\ dy=0\ ,$$

则称 x_0 是 f 的一个 Lebesque 点. 我们知道，对 $f \in L^1_{loc}\ (\mathbb{R}^n)$，几乎所有的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 都是 Lebesque 点.

引理 10 如果 $f \in L^\infty\ (\mathbb{R}^n)$，$x_0$ 是 f 的 Lebesque 点，则

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int |f\ (x_0+\varepsilon y)-f\ (x_0)|(1+|y|)^{-n-1} dy=0. \tag{6.7}$$

为说明此事，设 $J(r)=r^{-n}\int_{|y| \leqslant r} |\ f\ (x_0+y)-f\ (x_0)|dy$，经过分部积分后，我们求极限的这个积分就变成了

$$c^n \int_0^\infty J\ (\varepsilon r) \frac{r^n}{(1+r)^{n+2}}\ dr\ .$$

因为 $J(r) \leqslant 2\omega(n)\|f\|_\infty$，其中 $\omega(n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积，应用 Lebesque 控制收敛定理就可以得到所要求的结论.

再回到引理 9，我们有

$$\begin{aligned} &2^{nj} \int E\ (2^j x,\ 2^j u)\ E\ (u,\ y)\ du \\ &= \int E\ (2^j x,\ 2^j x+v)\ E(x+2^{-j} v,\ y)\ dv \\ &= \int K_j\ (x,\ v)\ f\ (x+2^{-j} v)\ dv, \end{aligned}$$

这里，已经假设了 $f(x)=E(x, y)$.

因此，由 (6.2)，可以把要估计的差更简单地写成

$$\int K_j(x, v)\,(f(x+2^{-j}v)-f(x))\,dv,$$

我们用

$$C\int |f(x+2^{-j}v)-f(x)|(1+|v|)^{-n-1}dv$$

来控制它. 使用 (6.7) 就得出了引理 9 的结论.

当 $r=0$ 时，我们本来可以做得更简单些. 然而我们刚刚给出的证明可以不作太大的改动就能推广到现在讨论的 $r\geq 1$ 的情形.

由于 $\int E(x, y)dy=1$，也由于 (6.2)，可以看到 $2^{nj}E(2^{nj}x, 2^{nj}y)$ 是 x 处 Dirac 质量的一个恒等逼近. 这说明函数 $2^{nj}E(2^{nj}x, 2^{nj}u)$ 做出了一个在 x 附近以 2^{-j} 为尺度的局部化. 当人们想估计 $2^{nj}\int E(2^{nj}x, 2^{nj}u)\cdot E(u, y)du$ 时，由于这个性质，就可以用 Taylor 级数把 $E(u, y)$ 展开成 $(u-x)$ 的幂.

因此，我们写成

$$E(u, y)=\sum_{0\leqslant|\alpha|<r}\frac{(u-x)^\alpha}{\alpha!}\partial_x^\alpha E(x, y)+R(u, x, y),$$

其中，

$$R(u, x, y)=\sum_{|\alpha|=r}\frac{(u-x)^\alpha}{\alpha!}S_\alpha(u, x, y),$$

而

$$S_\alpha(u, x, y)=r\int_0^1\partial_x^\alpha E(tu+(1-t)x, y)(1-t)^{r-1}dt.$$

为了估计这个积分，作变量替换 $u=x+2^{-j}v$，这样 $S_\alpha(u,x,y,)$ 就变成

$$S_\alpha^{(j)}(v,\ x,\ y)=r\int_0^1 \partial_x^\alpha E(x+t2^{-j}v,\ y)\,(1-t)^{r-1}\ dt\,.$$

为了积分主项，设 $\alpha!m_\alpha(x)=\int E\ (x,\ u)\,(u-x)^\alpha du$，注意到这个函数是连续的，以 $\mathbb{Z}^n$ 为周期．于是

$$\begin{aligned}2^{nj}\int E\ (2^jx,\ 2^ju)E(u,\ y)\ dy&=\sum_{0\leqslant|\alpha|<r}2^{-j|\alpha|}m_\alpha\ (2^jx)\partial_x^\alpha E\ (x,\ y)\\&\quad+r2^{-jr}\sum_{|\alpha|=r}\iint_0^1 E(2^jx,\ 2^jx+v)\partial_x^\alpha E(x+t2^{-j}v,\ y)\,(1-t)^{r-1}dt\ dv\\&=E\ (x,\ y).\end{aligned}\tag{6.8}$$

我们不考虑（6.8）式中的第一个等号，而系统地证明（6.8）的第二个等号成立．

对 $s=|\alpha|\in[1,\ r]$ 进行递推来证明 $m_\alpha\ (x)=0$．我们指出当 $s=1$ 时，这是对的．因为 $m_0\ (x)=1$，$E\ (x,\ y)$ 这项消去了．在做了这样第一个简化后，有

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant r-1}2^{-j|\alpha|}m_\alpha\ (2^jx)\partial_x^\alpha E\ (x,\ y)+0(2^{-jr})=0,\tag{6.9}$$

其中 0 项对 x，对 y 是一致的．这样就可以用 2^j 去乘（6.9），然后取极限．因此，

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{|\alpha|=1}m_\alpha(2^jx)\partial_x^\alpha E(x,\ y)=0\,.$$

我们再考虑 $r=0$ 的情形．对 $f\in V_0$ 积分，得到

$$\lim_{j\to+\infty}\ \sum_{|\alpha|=1}m_\alpha\ (2^jx)\partial^\alpha f=0\,.$$

此外，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，模掉 $\mathbb{Z}^n$，序列 2^jx 是等分布的．特别地，对所有的 $u\in\mathbb{R}^n$，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，可以找到一个 j 的序列，使得 $m_\alpha\ (2^jx)$ 收敛于 $m_\alpha\ (u)$．这样便得到 $\sum_{|\alpha|=1}m_\alpha(u)\partial^\alpha f=0$ 对

所有的 $u\in\mathbb{R}^n$ 和所有的 $f\in V_0$ 成立．通过一个简单的变量替换，当 $f\in V_j$ $(j\geqslant 0)$ 时，也有同样的等式．由于稠密性，对所有的 $u\in\mathbb{R}^n$ 和所有的 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，在分布意义下我们有 $\sum_{|\alpha|=1} m_\alpha(u)\cdot\partial^\alpha f=0$．由此得出，所有 m_α 是零．

如果我们不想使用模去 1 的等分布，可以进行如下推理．设 $g(x)$ 是一个 $\mathbb{Z}^n$ 周期的连续函数，对乘积 $g(2^j x)h(x)$ $(h\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n))$ 来积分下式：

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{|\alpha|=1} m_\alpha(2^j x)\partial^\alpha f=0,\ (f\in V_0)\,, \tag{6.10}$$

然后使用下面的引理，它的证明将在证完定理 4 后给出．

引理 11 设 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，它是 $\mathbb{Z}^n$ 周期的函数，如果 $v(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{N\to\infty}\int_{R^n} u(Nx)v(x)dx=\left(\int u\right)\int_{R^n} v\,dx, \tag{6.11}$$

其中，

$$\int u=\int_0^1\cdots\int_0^1 u(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,dx_1\cdots dx_n.$$

又回到 (6.10)，积分并取极限后得到 $\sum_{|\alpha|=1}\left(\int gm_\alpha\right)<\partial^\alpha f,h>=0$．即，如果设 $c_\alpha=\int gm_\alpha$，那么向量场 $\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha\partial^\alpha$ 使所有 V_0 中的函数变为零．通过一个简单的变量替换，这个向量场使所有的 V_j $(j\in\mathbb{N})$ 为零；又由于稠密性，（在分布意义上）它使所有 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 f 为零．因此对所有的函数 g，$c_\alpha=0$．这恰好证明了，当 $|\alpha|=1$ 时，$m_\alpha=0$．当 $s=|\alpha|<r$ 时，这个证明也不需任何改动，便又得到 $|\alpha|<r$ 时，$m_\alpha(x)=0$．还剩下 $|\alpha|=r$ 的情形．这时 (6.8) 变为

$$\sum_{|\alpha|=r}\iint_0^1 E\ (2^j x,\ 2^j x+v)\partial_x^\alpha E(x+t2^{-j}v,\ y)(1-t)^{r-1}\ dt\ dv=0.$$

再使用当任意 y 固定时，$\partial_x^\alpha E\ (x,\ y)\in L^\infty\ (\mathbb{R}^n)$ 这个事实．对这个函数来说，几乎所有的点 $x\in\mathbb{R}^n$ 都是 Lebesque 点．如果 x 是一个 Lebesque 点，那么这个积分可以由相应的积分所代替，其中 $\partial_x^\alpha E\ (x+t2^{-j}v,\ y)$ 由 $\partial_x^\alpha E(x,\ y)$ 所代替．

因此，我们得到了和 $S_j(x,\ y)=\sum_{|\alpha|=r}m_\alpha(2^j x)\partial_x^\alpha E(x,\ y)$ 的极限对所有的 $y\in\mathbb{R}^n$，对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 都等于零．函数 $S_j\ (x,\ y)$ 满足一致估计 $|S_j(x,\ y)|\leqslant C_m(1+|x-y|)^{-m}$．对 $f\in V_0$ 积分就得到了

$$\sum_{|\alpha|=r}m_\alpha(2^j x)\partial^\alpha f$$

几乎处处收敛于零，它也在 $L^2\ (\mathbb{R}^n)$ 意义下收敛于 0，这是由于我们可以使用 Lebesque 控制收敛定理．

因此象在 $s<r$ 时那样，当 $|\alpha|=r$ 时也能得出所有的系数 $m_\alpha=0$．

现在证明定理就成为一个简单的练习了．我们要证明，对于 $1\leqslant|\alpha|\leqslant r$，有 $\int E\ (x\ ,\ \ y)\ \ (x-y)^\alpha\ dy=0$，以及 $\int E\ (x,\ y)\ \ dy=1$．由此立即可得 $\int E\ (x,\ y)y^\alpha\,dy=x^\alpha\ \ (|\alpha|\leqslant r)$．事实上，我们写出

$$\frac{y^\alpha}{\alpha\,!}=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\ \frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\ \frac{x^\gamma}{\gamma!},$$

然后对 y 积分，除了 $\beta=0$，$\gamma=\alpha$ 这项外，右边所有的项都是零．

还剩下证明引理 11．把 $\mathbb{R}^n$ 分解成 $Q_0+\mathbb{Z}^n$，其中 Q_0 是单位方体 $[0,\ 1)^n$．可以用 $w(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}v\ (x+k)$ 来代替 $v(x)$．因此只需在 u

和 w 是周期的情形来证明此引理，从而只要在 n 维环面 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上积分就行了. 使用三角多项式是 L^1 $(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ 中的稠子空间这个事实来推理. 利用线性只要考虑 $w(x)=\exp(2\pi il\cdot x)$，最后有

$$\int_{\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n} u(Nx)\exp(2\pi il\cdot x)\,dx=0,$$

其中，$l\neq 0$, N 充分大使得 $l\notin N\mathbb{Z}^n$; 当 $l=0$ 时，这个积分就等于 u 的积分.

改写定理 4, 我们把算子 E_j 的定义域扩大到属于 $L^2(\mathbb{R}^n;(1+|x|)^{-m}dx)$ 的函数集合，其中 $m\in\mathbb{N}$ 是某个整数. 因为当 $|y-x|\to+\infty$ 时，E_j 的核是速降的，所以这个扩张不存在任何问题. 所得的空间不再是 V_j, 但它在模 L^2〔$\mathbb{R}^n;(1+|x|)^{-m}dx$〕下是完备的；这一切都像第 5 节那样.

我们有下面的重要的等式 (6.12).

推论 设 V_j 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r 正则的多分辨率分析. 如果 E_j: $L^2(\mathbb{R}^n)\to V_j$ 是在 V_j 上的正交投影算子，那么对任何次数小于或等于 r 的多项式 P, 有

$$E_j(P)=P. \tag{6.12}$$

下面要叙述的定理是定理 4 的一个容易但重要的推论. 定理 5 的意义在于表明，算子 E_j 类似一个卷积算子. 卷积算子与求导算子 ∂^α 交换，而算子 E_j 近似地与满足 $|\alpha|\leqslant r$ 的算子 ∂^α 交换. 现在我们就来叙述这个近似交换性.

固定一个函数 $g\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，它的积分值为 1. 分别用 g_j 表示函数 $2^{nj}g(2^jx)$. 再用 G_j 表示与函数 g_j 作卷积的算子.

我们想对所有满足 $|\alpha|\leqslant r$ 的多重指标 α, 比较 $\partial^\alpha E_j$ 与 $G_j\partial^\alpha$.

定理 5 设 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨分析. 则对任何满足 $|\alpha|\leqslant r$ 的多重指标 α, 以及任何满足 $|\beta|=|\alpha|$ 的指标 β,

存在函数 $R^{(\alpha,\beta)} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，对任何整数 $m \in \mathbb{N}$，满足

$$|R^{(\alpha,\beta)}(x, y)| \leqslant C_m (1+|x-y|)^{-m}, \tag{6.13}$$

$$\int R^{(\alpha,\beta)}(x, y)\, dy = 0 \quad (\forall x); \tag{6.14}$$

如果对所有 $j \in \mathbb{Z}$，定义算子 $\mathscr{R}_j^{(\alpha,\beta)}$ 为

$$\mathscr{R}_j^{(\alpha,\beta)} f(x) = 2^{nj} \int R^{(\alpha,\beta)}(2^j x, 2^j y) f(y)\, dy, \tag{6.15}$$

记 $\partial^{\alpha} = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$，那么还有下式成立:

$$\partial^{\alpha} E_j = G_j \partial^{\alpha} + \sum_{|\beta|=|\alpha|} \mathscr{R}_j^{(\alpha,\beta)} \partial^{\beta}. \tag{6.16}$$

一旦证明了(6.16)，用类似的推理可以证明 $E_{j+1} - E_j = 2^{-jr} \cdot \sum_{|\beta|=r} \mathscr{R}_j^{(\beta)} \partial^{\beta}$，其中 $\mathscr{R}_j^{(\beta)}$ 是用核 $2^{nj} R^{(\beta)}(2^j x, 2^j y)$，而 $R^{(\beta)}$ 具有类似于 $R^{(\alpha,\beta)}$ 的性质.

显然，只需对 $j=0$ 证明 (6.16)，一般情形可以通过一个简单的变量替换而得到.

对固定的 x，考虑变量为 y 的函数 $\partial_x^{\alpha} E(x, y)$. 由定理 4 知

$$\int \partial_x^{\alpha} E(x, y) y^{\beta}\, dy = 0 \quad (|\beta| \leqslant |\alpha|, \quad 且\ \beta \neq \alpha,)$$

及

$$\int \partial_x^{\alpha} E(x, y) y^{\alpha}\, dy = \alpha!.$$

然而，算子 $G=G_0$ 的核 $g(x, y)$ 与 $E(x, y)$ 都有这个性质，这使我们考虑差 $R^{\alpha}(x, y) = \partial_x^{\alpha} E(x, y) - \partial^{\alpha} g(x-y)$；当 $|\beta| \leqslant |\alpha|$ 时，有 $\int R^{\alpha}(x, y) y^{\beta}\, dy = 0$. 最后设 $f^{\alpha}(x, y) = R^{\alpha}(x, x+y)$，让 x 固定，认为它是 y 的函数. 这个函数属于我们现在就要定义的

空间 $\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^n)$.

用 $\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^n)$ 表示满足以下性质的函数 f 的向量空间：对任意整数 $m\in\mathbb{N}$，对所有满足 $|\alpha|\leqslant r$ 的多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}$, $|\partial^\alpha f(x)|\leqslant C_m(1+|x|)^{-m}$.

另外还假设 $0\leqslant s\leqslant r$，我们有如下引理.

引理 12 设 $f\in\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^n)$ 并且满足 $\int f(x)x^\alpha dx=0$ $(\alpha\in\mathbb{N}, |\alpha|\leqslant s)$，则 $f(x)=\sum_{|\alpha|=s}\partial^\alpha f_\alpha(x)$，其中 $f_\alpha\in\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^n)$，且 $\int f_\alpha(x)\,dx=0$ $(\alpha\in\mathbb{N}$, 且 $|\alpha|=s)$.

以后再证引理 12. 我们现在先把它用到一个依赖参数 x、自变量为 y 的函数 $f^\alpha(x, y)$ 上. 这时，

$$\partial_x^\alpha E(x, y)=(-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha g(x-y)+\sum_{|\beta|=|\alpha|}\partial_y^\alpha R^{(\alpha,\beta)}(x, y),$$

其中 $|R^{(\alpha,\beta)}(x, y)|\leqslant C_m(1+|x-y|)^{-m}$ $(m\in\mathbb{N})$. 此外，对所有的 x, $\int R^{(\alpha,\beta)}(x, y)\,dy=0$.

为了得到结论，充分地只需注意到，如果 $S(x, y)$ 是对 y 充分正则的函数，并且定义了一个算子，那么算子 $S\partial^\beta$ 的核恰恰就是 $(-1)^{|\beta|}\partial_y^\beta S(x, y)$，这可简单地通过分部积分证明.

回到引理 12 的证明. 对维数 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时，结果是平凡的. 这时 f_s 是 f 的 s 阶原函数且它在无穷远处为零. 当 $n\geqslant 2$ 时，为写起来简单仅限于 $s=1$ 的情形，而让读者去处理一般情形的细节.

设 $x=(x', x_n)$，其中 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$. 令 $g(x')=\int f(x', x_n)\,dx_n$,

令 $h(x')=\int f(x',x_n)\,x_n\,dx_n$. 由假设知 $\int g(x')\,dx'=\int x_j g(x')dx'=0$ $(1\leqslant j\leqslant n-1)$. 又 $g\in\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^{n-1})$. 根据归纳假设有

$$g(x')=\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_j}g_j(x'),\ \text{其中}\ g_j\in\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^{n-1}),$$

以及 $\int g_j(x')\,dx'=0$. 此外还有 $\int h(x')\,dx'=0$.

设 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 具有积分值 1, 又设 $\psi=-\varphi'$. 则 $\int\psi(x_n)\,dx_n=0$, 及 $\int x_n\psi(x_n)\,dx_n=1$.

作辅助函数 $r(x)=f(x)-g(x')\varphi(x_n)-h(x')\psi(x_n)$. 由 g 与 h 的定义知

$$\int r(x',x_n)dx_n=0,\quad \int r(x',x_n)x_n dx_n=0.$$

因此，$r(x',x_n)=\dfrac{\partial}{\partial x_n}g_n(x',x_n)$，其中与 $r(x',x_n)$ 一样，$g(x',x_n)$ 属于 $\mathscr{S}_r(\mathbb{R}^n)$. 于是我们得到

$$f(x)=\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(g_j(x')\varphi(x_n))+\frac{\partial}{\partial x_n}(g_n(x)-h(x')\varphi(x_n)),$$

这就是引理的结论.

注意到我们所使用的方法以线性和连续的方式依赖于 f. 因此，如果 f 是某一参数的连续函数，则 f_α 也如此.

再回到定理 5, 它意味着，如果 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的多分辨分析 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 使得相应的函数 φ 属于 C^r, 则函数 $R^{(\alpha,\beta)}$ 在自变量的集合上连续.

7. 用多分辨率分析构造的逼近的性能

我们从研究 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 f 的逼近 $E_j(f)$ 开

始．先回忆一下这个空间的定义．

当 $s=0$ 时，$H^s(\mathbb{R}^n)$ 与 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 重合．如果 $s\in\mathbb{N}$, $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，并且它的所有 $|\alpha|\leqslant s$ 的在分布意义上的导数 $\partial^\alpha f$ 也属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，则称 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$. 同样也可以用 $\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi<\infty$ 来定义 $H^s(\mathbb{R}^n)$. 这是当 $0\leqslant s\leqslant r$，且 s 不再是整数时的定义．

当 $s<0$ 时，空间 H^s 的定义基于以下想法，对 $s=-\sigma(\sigma>0)$，H^σ 是试验函数组成的 Hilbert 空间，而 H^s 是其共轭的分布的空间．这个共轭性是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 之间的自然的共轭．应用 Parseval 等式，立即有：如果 $s<0$，一个缓分布 $S\in H^s(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当它的 Fourier 变换 $\hat{S}\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int|\hat{S}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi<+\infty$.

下面的定理是叙述用算子 E_j 逼近函数有效性一系列定理中的第一个．

定理 6　设 $r\in\mathbb{N}$，设 $V_j\ (j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r 正则多分辨率分析．如果 f 属于 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$，而 $-r\leqslant s\leqslant r$; 则依 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 模 $E_j(f)$ 收敛于 f.

为证明这个结论，要用到下面的简单引理．

引理 13　设 $K(x,y)\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 是一个函数，它满足 $|K(x,y)|\leqslant C(1+|x-y|)^{-n-1}$; 以及对任意 x，有 $\int K(x,y)dy=0$. 固定一个指标 $1\leqslant p\leqslant\infty$．设 $T_\lambda: L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 是核为 $\lambda^n K(\lambda x,\lambda y)\ (\lambda>0)$ 的算子．即

$$T_\lambda f(x)=\lambda^n\int K(\lambda x,\lambda y)\,f(y)\,dy.$$

如果 $1\leqslant p<\infty$，$f\in L^p$，则 $\lim_{\lambda\uparrow\infty}\|T_\lambda(f)\|_p=0$.

同样地，设 $|K(x,y)|\leqslant C(1+|x-y|)^{-n-1}$，设对任意 x，$\int K(x,y)\,dy=1$，若 $f\in L^p$ $(1\leqslant p<\infty)$，则 $\lim_{\lambda\uparrow\infty}\|T_\lambda(f)-f\|_p=0$.

若 $p=\infty$，又设 $f\in L^\infty$ $(\mathbb{R}^n)$ 是一致连续的，又 $K(x,y)$ 当 y 固定时是 x 的连续函数，则在 $|K(x,y)|\leqslant C(1+|x-y|)^{-n-1}$ 及 $\int K(x,y)dy=1$ 的假设下，有 $\lim_{\lambda\uparrow\infty}\|T_\lambda(f)-f\|_\infty=0$.

引理的证明是典型的. 首先注意到，算子 T_λ: $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的模是一个与 λ 无关的有限常数. 因此，当 $1\leqslant p<\infty$ 时，可以使用稠密性来推理. 当 f 是一个紧支的连续函数时，在无穷远处有 $T_\lambda f(x)=O(|x|^{-n-1})$；当 $\lambda\geqslant 1$ 时，这个估计对 λ 是一致的. 此外 $T_\lambda f(x)=\lambda^n\int K(\lambda x,\lambda y)f(y)\,dy=\lambda^n\int K(\lambda x,\lambda y)(f(y)-f(x))\,dy$，它可以被 $C\int(1+|y|)^{-n-1}\omega(\lambda^{-1}|y|)\,dy=\varepsilon(\lambda)$ 控制，其中 $\omega(h)=\sup_{|x-y|\leqslant h}|f(x)-f(y)|$ 是 f 的连续模. 直接应用 Lebesgue 控制收敛定理就得到了 $\lim_{\lambda\uparrow\infty}\varepsilon(\lambda)=0$. 函数 $T_\lambda f(x)$ 一致收敛于零，并且在无穷远处是 $O(|x|^{-n-1})$，故依 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 模收敛到 0.

在引理的第二种情形中，$\int K(x,y)\,dy=1$. 这时，它是第一种情形的推论，并且是恒等逼近的典型结果. 事实上，用 g 表示一个紧支集的函数，它的积分值是 1；再用 $R(x,y)=K(x,y)-$

$g(x-y)$ 代替 $K(x, y)$，就可以把第一种情形的结果用于 $R(x, y)$ 了.

根据上面的计算，便可得到引理 13 的结论.

回到定理 6. 首先设 $s=r$. 依据 H^s 模的定义我们应该证明：当 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$ 时，对 $|\alpha|\leqslant r$, $\|\partial^\alpha E_j(f)-\partial^\alpha f\|_2\to 0$ $(j\to\infty)$ 成立.

应用定理 5, 有

$$\partial^\alpha E_j=G_j\,\partial^\alpha+\sum_{|\beta|=|\alpha|}\mathscr{R}_j^{(\alpha,\beta)}\partial^\beta .$$

只需再用引理 13.

如果 $0<s<r$, 但 s 不是整数时，我们首先指出算子 E_j: $H^s\to H^s$ 是一致有界的. 事实上，这个性质当 $s=0$ 及 $s=r$ 时是成立的 (这在前面已经证明过了).

由下面的经典命题可以得到中间的情形.

命题 1 如果任何线性算子 T 是 $L^2\to L^2$ 连续的，它限制到 Sobolev 空间 H^r 上也是 $H^r\to H^r$ 的线性连续算子；则当 $0<s<r$ 时，T 也是 H^s 上的线性连续算子.

如果把 T 作用于 L^2 及 H^r 上的算子模分别记为 C_0 与 C_1, 那么算子 T 在 H^s $(0<s<r)$ 上的模不超过 sup (C_0, C_1).

承认这个命题，我们继续证明定理 6. 已知 $H^r(\mathbb{R}^n)$ 是 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠子空间. 对任意 f 属于 H^s, $E_j(f)$ 依 H^r 模收敛于 f. 这时用稠密性的典型推理就得到了结论.

为了对 $-r\leqslant s\leqslant 0$ 的情形证明定理 6, 要先定义 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 上的 E_j. 注意到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠. 下面当 $v(x)$ 和 $u(x)$ 是两个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数时，设 $(u, v)=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\bar{v}(x)\,dx$.

若 f 和 g 属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$，则有 $(E_j(f), g)=(f, E_j(g))$. 如果设 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$ $(-r\leqslant s\leqslant 0)$，而 $f_m\in L^2(\mathbb{R}^n)$，且 f_m 依 H^s 模收敛于 f,

那么对 $g \in H^t(\mathbb{R}^n)$ $(t=-s)$，有

$$(E_j(f_m),\ g)=(f_m,\ E_j(g)) \to (f,\ E_j(g)) \quad (m\to\infty).$$

因此，我们用 $(E_j(f),\ g)=(f,\ E_j(g))$ 来定义 $E_j(f) \in H^s(\mathbb{R}^n)$. 由于 $E_j^2=E_j$，故 $(E_j(f),\ E_j(g))=(E_j(f),\ g)$. 下面要用到这点.

于是直接可得，当 $f \in H^t(\mathbb{R}^n)$ 时，$E_j(f)$ 收敛于 f. 从共轭性来看，算子 E_j: $H^s \to H^s$ 是一致有界的. 又，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠，当 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 时，$E_j(f)$ 依 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 模收敛到 f.

使用典型的"2ε 推导"，由稠密性可知，若 $-r\leqslant s<0$，则对任意的分布 $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$，有 $\lim\limits_{j\uparrow\infty}E_j(f)=f$.

还剩下证明命题 1. 用 Fourier 变换，只需证明以下结果.

设 $\omega(x)>0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 设 T: $L^2(\mathbb{R}^n,\ dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ dx)$ 是一个线性连续算子. 它也是 $L^2(\mathbb{R}^n,\ \omega(x)\ dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ \omega(x)\ dx)$ 连续的，则对 $0\leqslant s<1$，T 还是 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega(x)^s\,dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ \omega(x)^s\ dx)$ 连续的.

我们用复分析来证明它. 考虑两个有紧支集的连续函数 f 和 g，它们满足 $\|f\|_2\leqslant1$，$\|g\|_2\leqslant1$. 设 z 是满足 $0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant1$ 的复数. 构造整函数

$$F(z)=(T(f\omega^{-z/2}),\ g\omega^{z/2}). \tag{7.1}$$

当 $\mathrm{Re}\,z=0$ 时，$\|f\omega^{-\frac{z}{2}}\|_2=\|f\|_2\leqslant1$；同样地，$\|g\omega^{\frac{z}{2}}\|_2\leqslant1$. 由 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续，和 $|F(z)|\leqslant C_0$，其中 C_0 是算子 T: $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的模.

当 $\mathrm{Re}\,z=1$ 时，$\int|f\omega^{-\frac{z}{2}}|^2\omega\,dx=\|f\|_2^2\leqslant1$；同样，$\int|g\omega^{\frac{z}{2}}|^2\omega^{-1}dx=\|g\|_2^2\leqslant1$. 由 T 在 $L^2(\mathbb{R}^n,\omega\,dx)$ 上连续，知 $|F(z)|\leqslant C_1$，其中 C_1 是算子 T: $L^2(\mathbb{R}^n,\ \omega(x)\,dx) \to L^2(\mathbb{R}^n,\ \omega(x)\,dx)$ 的模.

(7.1) 中的数积总是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的内积.

最后应用极大模原理于整函数 $e^{\varepsilon z^2}F(z)$，这个函数对所有的 $\varepsilon>0$ 在 $0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant1$ 上连续，在内部全纯，在无穷远为零. 因此，

对 $0<\mathrm{Re}\, z<1$，有

$$|e^{\varepsilon z^2}F(z)|\leqslant\sup(C_0,\ e^{\varepsilon}C_1). \tag{7.2}$$

让 ε 趋于零，就得到 $|F(z)|\leqslant\sup(C_0,\ C_1)$ $(0\leqslant s=\mathrm{Re}\, z\leqslant 1)$. 稍加注意就知道，这个不等式正好就是 T 在中间空间 $L^2(\mathbb{R}^n, W^s dx)$ 上的连续性.

我们想把上述结果推广到空间 $W^{s,p}$ $(-r\leqslant s\leqslant r,\ 1<p<\infty)$ 上去，$W^{s,p}$ 定义如下．设 $0\leqslant s\leqslant r$，并且 s 是一个整数，则 $f\in W^{s,p}$，当且仅当 f 以及 $|\alpha|\leqslant s$ 的导数 $\partial^\alpha f$ 都属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$. 用 $(I-\Delta)^{s/2}f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 定义 $W^{s,p}$ 亦可（〔217〕第Ⅴ章定理 3). 在后一定义中，s 可以是任意实数．下面，我们象在 Sobolev 空间那样证明：对所有属于 $W^{s,p}$ 的函数或分布，$E_j(f)$ 依 $W^{s,p}$ 模收敛于 f.

与惯例相同，$p=\infty$ 的情形是一个例外．先扩展空间 $W^{m,p}$ $(m\in\mathbb{N})$ 的定义到 $W^{m,\infty}$. 定义 $W^{m,\infty}$ 为对所有 $|\alpha|\leqslant m$ 的多重指标 α，$\partial^\alpha f$ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

这样，对 $f\in W^{m,\infty}$，序列 $E_j(f)$ 在 $W^{m,\infty}$ 中一致有界并且弱收敛于 f. 即对所有的 $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，有 $\int E_j(f)\,g\,dx\to\int fg\,dx$. 我们已经假设了 $0\leqslant m\leqslant r$. 可以用通常的空间 C^m 并在无穷远处加上一些条件来代替 $W^{m,\infty}$.

先定义 C^m 如下，$f\in C^m$，如果 f 的 $|\alpha|\leqslant m$ 的导数都是有界的并且是一致连续的．因此，对任意 $f\in C^m(\mathbb{R}^n)$，只要满足条件 $0\leqslant m<r$，$E_j(f)$ 就依 C^m 模收敛于 f. 当 $m=r$ 时，要求用来计算 E_j 的核的 φ 本身也属于 C^m.（它及 $|\alpha|\leqslant m$ 的各阶导数在无穷远处速降.)

最后，当 $\varphi\in C^m$ 并且有紧支集时，我们可以用不对无穷远处的增长加任何限制的定义代替这个 C^m 的定义．在第Ⅲ章第 8 节，我们将看到，对某些多分辨率分析，这是可以办到的.

8. 算子 $D_j = E_{j+1} - E_j \ (j \in \mathbb{Z})$

设 $V_j \ (j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r 正则多分辨率分析. 用 W_j 表示 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补. $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 W_j 上的正交投影算子不是别的, 就是 $D_j = E_{j+1} - E_j$. 因此, $f(x) \in W_0$ 等价于 $f(2^j x) \in W_j$. 进而有

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j, \tag{8.1}$$

这要求 V_j 的併在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密并且 V_j 的交是 $\{0\}$ 成立.

于是可以用正交级数

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} D_j(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_j \tag{8.2}$$

分解任何一个 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数. 我们设想用这个分解估计经典函数空间的模, 会是一件轻松的事.

第一个选择是研究 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. 分解 (8.1) 归结为 W_j 在 L^p 上的限制或扩张.

若 $1 \leqslant p \leqslant 2$, 定义 $W_j(p)$ 为 W_j 与 L^p 的交, 这与 $V_j(p)$ 的定义是相容的. 我们仍有 $V_{j+1}(p) = V_j(p) + W_j(p)$. 其中和仍是直和但不再是正交直和了. 这是因为当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时, 算子 E_j 和 D_j 都使得 $V_{j+1}(p)$ 在 $V_j(p)$ 上与在 $W_j(p)$ 上的投影是 L^p 连续的.

最后, 有 $L^p(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j(p)$, 其中 $\oplus$ 是直和但不是正交直和. 这表明, 任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 可以唯一地写成

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} d_j, \text{ 其中, } d_j \in W_j(p). \tag{8.3}$$

并且当 $1 < p \leqslant 2$ 时, (8.3) 的部分和依 L^p 模收敛于 f. 这个验证是显然的, 这是因为当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时, 算子 E_j 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是一致连续的.

在 $2\leqslant p<\infty$ 的情形，定义 $W_j\ (p)$ 为 W_j 在 $L^p\ (\mathbb{R}^n)$ 中的完备化．在 $p=\infty$ 时，$W_j\ (p)$ 是 W_j 在带有拓扑 $\sigma(L^\infty,\ L^1)$ 的 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的完备化．

这就可以推广 (8.3) 到 $1<p<\infty$ 的情形．关于 $p=1$ 和 $p=\infty$ 的极端情形，我们将在第Ⅲ 章第 10 节以及第Ⅴ 章、第Ⅵ 章中讨论．

下面的结果补充了 Bernstein 不等式并使之更精确．

定理 7 设 $V_j\ (j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2\ (\mathbb{R}^n)$ 上一个 r 正则多分辨率分析．则存在两个常数 $C_2\geqslant C_2>0$，使得任意对满足 $0\leqslant s\leqslant r$ 的整数 s，对任意 $p\in$〔1，$+\infty$〕，对任意函数 $f\in W_0\ (p)$，有

$$C_1\|f\|_p\leqslant\sum_{|\alpha|=s}\|\partial^\alpha f\|_p\leqslant C_2\|f\|_p\ . \tag{8.4}$$

如果 s 不是整数，但 $0<s<r$，那么仍有

$$C_1\|f\|_p\leqslant\|\Lambda^s f\|_p\leqslant C_2\|f\|_p\ , \tag{8.5}$$

其中 $\Lambda=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$.

(8.4) 右边的不等式就是 Bernstein 不等式．为证明左边的不等式，我们记 $D\ (x,\ y)$ 为投影算子 $D_0=E_1-E_0$ 的核．显然，若 $f\in W_0$，则 $f\ (x)=\int D\ (x,\ y)\ f\ (y)\ dy$．使用定理 4 得到函数 $D\ (x,\ y)$ 的相消性质．一方面有 $|D\ (x,\ y)|\leqslant C_m\ (1+|x-y|)^{-m}\ (\forall m\in\mathbb{N})$．另一方面由 $D\ (x,\ y)=2^nE(2x,\ 2y)-E(x,\ y)$ 得到，当 $|\alpha|\leqslant r$ 时，有 $\int D\ (x,\ y)\ y^\alpha dy=0$，其中 $E\ (x,\ y)$ 是 E_0 的核．因此，应用引理12，就有 $D\ (x,\ y)=\sum_{|\beta|=s}\partial_y^\beta\ D_\beta\ (x,\ y)$，其中，函数 D_β 也满足 $|D_\beta\ (x,\ y)|\leqslant C_m'\ (1+|x-y|)^{-m}\ (m\in\mathbb{N})$．把这些加到一起就得到了 $f\ (x)=$

$\int D(x, y) f(y)\, dy=(-1)^s \sum\limits_{|\beta|=s} \int D_\beta(x, y)\, \partial^\beta f(y)\, dy$. 由于核 $D_\beta(x, y)$ 定义了 L^p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 上的有界算子，这就证明了 (8.4) 左边的不等式.

把这个证明用到 s 不是整数时的情形是常规的. 为读者方便，我们还是来叙述它. 当 $m<s<m+1$ 时，使用两个分解 $D_0=\sum\limits_{|\beta|=m} D_\beta\, \partial^\beta=\sum\limits_{|\beta|=m+1} D_\beta\, \partial^\beta$，再使用某个分割，它就变成 $D_0=G\Lambda^s$，其中 G 是某个对所有 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 都有界的算子. 这个分割是由 $I=U+V$ 给出的，其中 U 是一个与乘子 $u(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 相联系的卷积算子，而 $u(\xi)$ 是径向函数，在 $|\xi|\leqslant\frac{1}{2}$ 时等于 1 而在 $|\xi|>1$ 时为零.

由此得出

$$\begin{aligned} D_0 &= D_0U+D_0V \\ &= \sum_{|\beta|=m+1} D_\beta\partial^\beta\Lambda^{-s}U\Lambda^s+\sum_{|\beta|=m} D_\beta\partial^\beta\Lambda^{-s}V\Lambda^s \\ &= G\Lambda^s. \end{aligned}$$

为证明算子 G 对所有 L^p 是连续的，只需在 $|\beta|=m+1$ 时验证算子 $\partial^\beta\Lambda^{-s}U$ 以及在 $|\beta|=m$ 时验证算子 $\partial^\beta\Lambda^{-s}V$，它们分别是由乘子 $\xi^\beta\, |\xi|^{-s}u(\xi)$ 及 $\xi^\beta\, |\xi|^{-s}(1-u(\xi))$ 决定的卷积算子；其中，i 的幂已被忽略，而这两个函数是两个可积函数的 Fourier 变换. 证明结束.

推论 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，若 $f\in W_j(p)$，则当 s 是满足 $0\leqslant s\leqslant r$ 的一个整数时，有

$$C_1 2^{js}\, \|f\|_p\leqslant\sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha f\|_p\leqslant C_2 2^{js}\|f\|_p \tag{8.6}$$

而在 $0\leqslant s\leqslant r$ 的一般情形，同样有

$$C_1 2^{js}\|f\|_p \leqslant \|\Lambda^s f\|_p \leqslant C_2 2^{js}\|f\|_p . \tag{8.7}$$

证明只需在 (8.4) 或 (8.5) 中作 $x \to 2^j x$ 的变量替换.

注意到在 (8.7) 中，当 $j \in \mathbb{N}$ 时，可以用 $(I-\Delta)^{s/2}$ 代替 Λ^s. 写清楚就是：若 $1 \leqslant p < \infty$，则

$$\|\Lambda^s f\|_p \leqslant C(s, n)\|(I-\Delta)^{s/2} f\|_p .$$

这可由比较 $\Lambda^s f$ 与 $(I-\Delta)^{s/2} f$ 的 Fourier 变换得出，这就是我们要证的左边的不等式.

右边的不等式由下式得到，当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，有

$$\|(I-\Delta)^{s/2} f\|_p \leqslant C(s, n)\|(I+\Lambda^s) f\|_p .$$

命题 3 设 $-r \leqslant s \leqslant r$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $j \in \mathbb{N}$. 若 $f \in W_j(p)$，则

$$C_1 2^{js}\|f\|_p \leqslant \|(I-\Delta)^{s/2} f\|_p \leqslant C_2 2^{js}\|f\|_p , \tag{8.8}$$

其中 $C_2 \geqslant C_1 > 0$ 是两个常数.

我们仅限于 $-r \leqslant s < 0$ 的情形证明这个结论，因为 $0 \leqslant s \leqslant r$ 的情形已经讨论过了. 做 $x \to 2^j x$ 的变量替换后，要证明的是

$$C_1\|f\|_p \leqslant \|(\varepsilon I-\Delta)^{s/2} f\|_p \leqslant C_2\|f\|_p , \tag{8.9}$$

其中 $f \in W_0(p)$，而 $\varepsilon = 4^{-j}$.

为证明右边的不等式，再次使用已用过的等式 $I = U + V$. 用它可以分解 $(\varepsilon I-\Delta)^{s/2} = (\varepsilon I-\Delta)^{s/2} U + (\varepsilon I-\Delta)^{s/2} V$，其中第二项是由乘子 $(\varepsilon+|\xi|^2)^{s/2}(1-u(\xi))$ 决定的卷积算子. 由于当 $|\xi| \leqslant 1/2$ 时，$u(\xi)=1$，第一个因子在原点的奇性被第二个因子消去了. 因此，算子 $(\varepsilon I-\Delta)^{s/2} V$ 在 L^p 上是一致有界的.

为研究第一项在 $W_0(p)$ 上的作用，再次使用 W_0 的再生核 $D(x, y)$. 这样，当 $f \in W_0$ 时，$f(x) = \int D(x, y) f(y)\, dy$. 算子 D_0 是自共轭算子. (稍微改变一下记法) 我们已经用过的等式 $D_0 =$

$\sum_{|\beta|=r} D_\beta \partial^\beta$就变成$D_0=\sum_{|\beta|=r} \partial^\beta D_\beta$，其中$D_\beta$在$L^p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$上是有界算子.

因此，有

$$(\varepsilon I-\Delta)^{s/2} Uf=\sum_{|\beta|=r}\{(\varepsilon I-\Delta)^{s/2} U\partial^\beta\} D_\beta f,$$

其中，$(\varepsilon I-\Delta)^{s/2} U\partial^\beta$: $L^p \to L^p$，且当$|\beta|=r>s$与$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$时，它是在$L^p$上一致有界的. 可以通过计算由这个卷积算子决定的乘子而立即得到这个性质. 这个乘子（除掉i的幂）是$(\varepsilon+|\xi|^2)^{s/2} u(\xi)\ \xi^\beta$，它是一个可积函数的Fourier变换.

这样，我们就证明了(8.9)右边的不等式. 为证明左边的不等式，设$t=-s$. 把f写成$f=E_0(f)=E_0(\varepsilon I-\Delta)^{\frac{t}{2}}(\varepsilon I-\Delta)^{\frac{s}{2}} f$.

注意到当$1\leqslant p\leqslant\infty$时，算子$E_0(\varepsilon I-\Delta)^{\frac{t}{2}}$在$L^p$上一致有界，这是因为根据Bernstein不等式，这个算子的共轭算子$(\varepsilon I-\Delta)^{\frac{t}{2}} E_0$在$L^p$上一致有界.

现在我们用分解(8.2)刻划Sobolev空间$H^s(\mathbb{R}^n)$.

定理8 设$f\in H^{-r}(\mathbb{R}^n)$，$V_j$ $(j\in\mathbb{Z})$是$L^2(\mathbb{R}^n)$的一个多分辨率分析，$-r<s<r$，则$f\in H^s(\mathbb{R}^n)$当且仅当$E_0(f)\in L^2(\mathbb{R}^n)$，且$\|D_j f\|_2=\varepsilon_j 2^{-js}$，其中$j\in\mathbb{N}$，而$\varepsilon_j\in l^2(\mathbb{N})$.

此外，f在H^s中的模等价于$E_0(f)$的L^2模与级数ε_j的$l^2(\mathbb{N})$模之和.

先证明，若$d_j\in W_j$，使得$\|d_j\|_2=\varepsilon_j 2^{-js}$，其中$\varepsilon_j\in l^2(\mathbb{N})$，则$\sum_0^\infty d_j\in H^s(\mathbb{R}^n)$. 事实上，已知$V_0$包含在$H^s(\mathbb{R}^n)$中，因此，只要$u\in V_0$，$d_j\in W_j$，并且$\|d_j\|_2\leqslant\varepsilon_j 2^{-js}$，就有$u+\sum_0^\infty d_j$属于$H^s$. 下面

证它的反面.

为讨论 $\sum d_j$, 用 $\varepsilon>0$ 表示足够小使得 $|s|+2\varepsilon\leqslant r$ 成立的数. 我们使用 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的 Hilbert 结构, 它是由数积 $((I-\Delta)^{s/2}u, (I-\Delta)^{s/2}v)=((I-\Delta)^{s/2+\varepsilon}u, (I-\Delta)^{\frac{s}{2}-\varepsilon}v)$ 定义的, 其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 Hilbert 结构定义的共轭双线性形式. 用 $\|\cdot\|_s$ 记 H^s 的 Hilbert 模, 有

$$|((I-\Delta)^{s/2}u, (I-\Delta)^{s/2}v)|\leqslant\|u\|_{s+2\varepsilon}\|v\|_{s-2\varepsilon}. \tag{8.10}$$

这就导致

$$\left\|\sum_0^\infty d_j\right\|_s^2\leqslant 2\sum_{j<k}\sum\|d_j\|_{s+2\varepsilon}\|d_k\|_{s-2\varepsilon}+\sum_j\|d_j\|_s^2.$$

再使用命题 3, 当 $-r\leqslant\sigma\leqslant r$ 时, 有 $\|d_j\|_\sigma\simeq 2^{j\sigma}2^{-js}\varepsilon_j$. 因此, $\|d_j\|_{s+2\varepsilon}\|d_k\|_{s-2\varepsilon}\leqslant C\ \varepsilon_j\ \varepsilon_k\ 4^{-\varepsilon(j-k)}$. 剩下就要控制 $\sum_{j<k}\sum\ \varepsilon_j\ \varepsilon_k\ 4^{-\varepsilon|j-k|}+\sum\varepsilon_j^2$.

由假设知它的第二个和是有限的; 因为 l^1 与 l^2 的序列构成的卷积是 l^2 中的序列, 而第一个和就是如此.

定理 8 的第二个结论是: 条件 $E_0(f)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 与 $\|D_jf\|\leqslant\varepsilon_j2^{-js}$ 对 $f\in H^s$ 是必要的. 我们将对 $t=-s$ 的情形直接验证, 然后再用关于共轭性的一个简单注释.

设 f 是一个属于 $-r$ 的分布, 而 g 是一个对足够大的 j 满足 $D_j(g)=0$ 的试验函数. 显然有

$$(f, g)=(E_0(f), E_0(g))+\sum_0^\infty(D_j(f), D_j(g)), \tag{8.11}$$

其中 $(u, v)=\int u(x)\bar{v}(x)dx$.

设 $f\in H^s$, 我们用特别的方式构造 g, 使得 $E_0(g)=\alpha E_0(f)$ $(\alpha>0)$, 并且 $D_j(g)=\varepsilon_j D_j(f)$, 其中当 $0\leqslant j\leqslant N$ 时, $\varepsilon_j>0$, 而当 $j>N$ 时, $\varepsilon_j=0$.

最后, 选择 $\alpha>0$ 及 $\varepsilon_j>0$, 使得根据已讨论过的定理的直接

部分有 $\|g\|_{H^s}\leqslant C$，其中 C 是一个常数．为此，只需 $\alpha\|E_0(f)\|\leqslant 1$ 及 $\sum_0^N \varepsilon_j^2 4^{-js}\|D_j(f)\|_2^2\leqslant 1$．在此条件下有 $|(f,g)|\leqslant C\|f\|_{H^s}$．因此，$\alpha\|E_0(f)\|_2^2+\sum_0^N \varepsilon_j\|D_j(f)\|_2^2\leqslant C\|f\|_{H^s}$．适当选择 α 与 ε_j，就完全得到了所要的结论．

现在，定理 8 证完了，它有以下推论．

推论 若 $-r<s<r$，设 $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$，$g\in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$，则 (8.11) 式成立，并且式子右边是一个绝对收敛的级数．

事实上，$\|D_j(f)\|_2\leqslant\varepsilon_j 2^{-js}$，$\|D_j g\|_2\leqslant\eta_j 2^{js}$，由此 $|(D_j(f),D_j(g))|\leqslant\varepsilon_j\eta_j$，而 $\varepsilon_j\eta_j$ 是一个可和序列．

9. Besov 空间

我们仅限于考虑非齐次 Besov 空间 $B_p^{s,q}$，并且先考虑正则性指标 s 是严格正的情形．

Besov 空间的第一个定义没有使用 Fourier 分析，它是建立在最佳逼近的概念上．

设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，$s>0$，$m$ 是一个满足 $m>s$ 的整数（m 的取值并不重要，m 越小，越容易验证）．

如果 f 本身属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$，并且存在正项序列 $\varepsilon_j\in l^q$ 以及一个由 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的函数构成的序列 f_j，使得对所有满足 $|\alpha|=m$ 的多重指标 α，

$$\|f-f_j\|_p\leqslant\varepsilon_j 2^{-js}\quad(j\in\mathbb{N})\tag{9.1}$$

及

$$\|\partial^\alpha f_j\|_p\leqslant\varepsilon_j 2^{(m-s)j}\tag{9.2}$$

成立，则称 f 属于非齐次 Besov 空间 $B_p^{s,q}$，其中导数是在分布意

义上取的.

因此设 $g_j=f_{j+1}-f_j$，就有

$$f=f_0+g_0+g_1+\cdots, \tag{9.3}$$

其中

$$\|\partial^\alpha g_j\|_p\leqslant\varepsilon_j 2^{(m-s)j} \quad (|\alpha|=m),$$

且

$$\|g_j\|_p\leqslant\varepsilon_j\, 2^{-sj}$$

成立.

反之，若 $0<s<m$，从分解 (9.3) 式及 g_j 的性质可以得到 (9.1) 和 (9.2) 式.

Besov 空间的第二个定义在于具体给出构造 g_j 的方法. 为此，从一个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则的多分辨率分析 V_j ($j\in\mathbb{Z}$) 出发. 我们用 $E_j: L^2(\mathbb{R}^n)\to V_j$ 表示正交投影算子，而用 D_j 表示算子 $E_{j+1}-E_j$. 这时 D_j 在 W_j 上的正交投影算子，其中 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 的正交补. 在这个条件下，有

命题 4 设 $0<s<r$，$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，则 f 属于非齐次 Besov 空间 $B_p^{s,q}$，当且仅当序列 $2^{js}\|D_j(f)\|_p$ 属于 $l^q(\mathbb{N})$. 此外，f 的 $B_p^{s,q}$ 模等价于 $\|E_0(f)\|_p$ 与相应的 l^q 模之和.

从某种意义上说，命题 4 是显然的. 事实上，用 Bernstein 不等式就可以估计 $\partial^\alpha(D_jf)$ ($|\alpha|\leqslant r$) 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 模，因此就得到 (9.3).

反之，使用 (9.3) 给出的 $B_p^{s,q}$ 的定义，就得到

$$D_j(f)=D_j(f_0)+\sum_{k=0}^{\infty}D_j(g_k).$$

当 $j\leqslant k$ 时，根据算子 D_j: $L^p\to L^p$ ($1\leqslant p\leqslant\infty$) 一致有界这个事实，就可以简单地用 $C\|g_k\|_p$ 控制 $\|D_j(g_k)\|_p$.

当 $j>k$ 时，使用定理 5 后的注把 D_j 分解成 $2^{-jr}\sum_{|\alpha|=r}\mathscr{R}_j^\alpha\partial^\alpha$. 这

样就可以用 $C\,\varepsilon_k\,2^{(r-s)k}2^{-rj}$ 控制 $\|D_j\,(g_k)\|_p$. 因此,

$$\|D_j\,(f)\|_p \leqslant C2^{-rj}\sum_{0}^{j}\varepsilon_k\,2^{(r-s)k}+C\sum_{j+1}^{\infty}\varepsilon_k 2^{-sk}$$
$$\leqslant C'\,\tilde{\varepsilon}_j\,2^{-sj}\ ,$$

其中

$$\tilde{\varepsilon}_j=\sum\varepsilon_k\,2^{-(r-s)\,|j-k|}$$

是一个 l^q 序列与一个 l^1 序列的卷积. 因此, $\tilde{\varepsilon}_j$ 属于 l^q.

命题 4 就全部证完了.

与作为 Besov 空间的特殊情形 Sobolev 空间类似, 可以把 Besov 空间的定义扩充到 s 是负数或零的情形. 设 r 是一个满足 $r>|s|$ 的整数. 若 $E_0\,(f)\in L^p\,(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|D_jf\|_p\leqslant\varepsilon_j\,2^{-js}\quad(\varepsilon_j\in l^q\,(\mathbb{N})\,),$$

则称 $f\in B_p^{s,\,q}$. 因此, 如果 $s'=-s$, $s'>0$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, 则立刻可以看出

$$(f,\,g)\ =(E_0\,(f)\,,\,E_0\,(g))+\sum_{0}^{\infty}(D_j\,(f)\,,\,D_j\,(g))\,,$$

它给出了分布 $f\in B_p^{s,\,q}$ 与函数 $g\in B_{p'}^{s',\,q'}$ 之间的共轭关系.

若 $p>1$, $q>1$, 则 $B_p^{s,\,q}$ 是 $B_{q'}^{s',\,q'}$ 的共轭, 并且它的定义不依赖于所选择的多分辨率分析. 我们亦可直接验证, 当 $p\geqslant1$, $q\geqslant1$ 时, $B_p^{s,\,q}$ 的这个定义是内在的.

这个共轭性的一个特殊而又重要的情形是 Hölder 空间 C^r $(r>0)$.

先设 $0<r<1$, 定义 (非齐次) Hölder 空间 C^r 为满足如下性质的函数 f 的集合, f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是有界的连续函数, 且 $\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{|f\,(x)-f\,(y)|}{|x-y|^r}<+\infty$ 成立. f 在 C^r 中的模是 f 的 $L^\infty\,(\mathbb{R}^n)$ 模

与这个上确界的和. 因此, C^r 是一个 Banach 代数.

我们熟知的 Ascoli 定理指出, 若 f_j 是 C^r 函数的一个有界序列, 则可以从中选出一个子列 f_{j_k}, 它在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛到 C^r 中的一个函数 f. 这个性质很类似于以下经典的叙述: 若 E 是可分的 Banach 空间, 则 E 的共轭空间 E^* 的单位球在弱拓扑 $\sigma(E^*, E)$ 下是紧的度量空间.

这两种叙述方法, 即 Ascoli 定理及可分 Banach 空间的共轭空间的单位球的弱紧性, 是由以下事情相关联的: Hölder空间 C^r 与可分 Banach 空间 $B=B_1^{-r,1}$ 的共轭空间 —— Besov 空间 $B_\infty^{r,\infty}$ 相重合.

我们将在 $0<r<1$ 时验证这两个论断. 然后讨论当 $r\geq 1$ 时 C^r 的定义, 希望仍有 $B_\infty^{r,\infty}=C^r$ 成立. 同时, 还要用 Zygmund 类 Λ_* 代替空间 C^1.

从验证

$$C^r=B_\infty^{r,\infty}=(B_1^{-r,1})^* \tag{9.4}$$

开始.

首先, 设 $f\in C^r$, 这时

$$\begin{aligned} D_jf(x)&=2^{nj}\int D(2^jx, 2^jy)f(y)\,dy \\ &=2^{nj}\int D(2^jx, 2^jy)(f(y)-f(x))\,dy. \end{aligned}$$

由 $|f(y)-f(x)|\leq C|y-x|^r$, 以及 $|D(x, y)|\leq C|x-y|^{-n-1}$, 直接得到 $\|D_jf\|_\infty$ 的控制.

反之, 设 $f=g_0+f_0+f_1+\cdots$, 其中 $\|f_j\|_\infty\leq C2^{-jr}$, $\|\partial/\partial x_k\, f_j\|_\infty\leq C2^{j(1-r)}$ $(1\leq k\leq n)$. 又设 g_0 与它的梯度属于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 这样, $f\in C^r$. 为证明此事, 要估计 $|f(y)-f(x)|$ (当 $|x-y|<1$ 时). 我们先找一个整数 $N\geq 1$, 它满足 $2^{-N}\leq|x-y|<2\cdot 2^{-N}$. 然后用 ∇ 表示梯度. 当 $j\leq N$ 时, 用 $|y-x|\ \|\nabla f_j\|_\infty$ 控制 $|f_j(y)-f_j(x)|$. 否则就

用 $2\|f_j\|_\infty$ 控制. 另外，显然有 $|g_0(y)-g_0(x)|\leqslant C_0|x-y|$. 把这些估计放到一起，就可以用

$$C|x-y|\sum_0^N 2^{j(1-r)}+C\sum_{N+1}^{\infty}2^{-jr}\leqslant C'|x-y|^r$$

控制 $|f(x)-f(y)|$.

我们现在讨论空间 $B_1^{-r,1}$. 分布 h 属于这个空间当且仅当

$$h=u_0+\sum_0^{\infty}v_j,$$

其中，$u_0\in V_0\cap L^1$，$v_j\in W_j\cap L^1$，且 $\|u_0\|_1+\sum_0^{\infty}2^{-jr}\|v_j\|_1<\infty$. 根据定义，这个和式就是 h 的 $B_1^{-r,1}$ 模. 显然，

$$(f,h)=(g_0,u_0)+\sum_0^{\infty}(f_j,v_j) \tag{9.5}$$

给出了 $f\in C^r$ 与 $h\in B_1^{-r,1}$ 的共轭性，这里因为，$|(f_j,v_j)|\leqslant\|f_j\|_\infty\|v_j\|_1\leqslant C2^{-jr}\|v_j\|_1$.

为了证明 C^r 正好就是 $(B_1^{-r,1})^*$，充分地只需证明，对任意 $f\in W_j(\infty)$，$\|f\|_\infty\leqslant C\sup|(f,h)|$ 成立，其中，上确界是对所有满足 $\|h\|_1\leqslant 1$ 的 $h\in W_j$ 来取的. 为说明它，设 $h\in L^1(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|h\|_1\leqslant 1$，且 $\|f\|_\infty\leqslant 2|(f,h)|$. 由于 $f\in W_j(\infty)$，我们有 $(f,h)=(f,D_jh)=(f,h_j)$. 而 D_j: $L^1\to L^1$ 是有界算子，且 D_j 的模与 j 无关. 因此，有 $\|h_j\|_1\leqslant C$，及 $\|f\|_\infty\leqslant 2|(f,h_j)|$. 用 $2C$ 代替 C，就证明了所求的不等式.

若 $r=1$，不用通常的空间 C^1 而用 Zygmund 类代替它. 我们现在就来定义这个类. 如果 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续，存在常数 C，对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，$y\in\mathbb{R}^n$，使得 $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|\leqslant C|y|$ $(|y|<1)$ 成立，则称 $f\in\Lambda_*$. 此外，为估计 $|y|>1$ 的情形，还要求 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. f 的 Λ_* 模是 $\|f\|_\infty$ 与定义 Λ_* 的不等式中常数 C 的下确界的和.

最后，若 $m<s\leqslant m+1$，称 $f\in C^s(\mathbb{R}^n)$，如果 f 是 C^m 类的函

数，它的满足 $|\alpha|=m$ 的每个导数 $\partial^\alpha f$ 属于前面定义的空间 C^{s-m}. 此外，还要求 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

有了这些概念，便有

命题 5 设 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r 正则多分辨率分析，则 $f\in C^s$ $(s<r)$ 当且仅当 $E_0(f)\in L^\infty$，且 $\|D_j(f)\|_\infty\leqslant C2^{-js}$，其中 C 是一个常数.

我们将在第Ⅵ章讨论齐次 Hölder 空间，因此这里仅限于讨论命题 5 证明中的主要困难. 要验证的是 $f\in C^s$ ($s\geqslant 1$ 是一个整数) 蕴含着 $\|D_j(f)\|_\infty\leqslant C2^{-js}$. 困难在于空间 C^s 不再是通常的空间，而是 C^1 变成了 Zygmund 类 $\cdots$. 先说明，怎样把问题归于 $s=1$ 的情形. 为此设 $s=m+1$，使用已有的等式

$$D_j=2^{-js}\sum_{|\alpha|=s}D_j^\alpha\partial^\alpha. \tag{9.6}$$

我们知道，算子 D_j 是用核 $2^{nj}D_\alpha(2^jx, 2^jy)$ 定义的，其中，$|D_\alpha(x,y)|\leqslant C_N(1+|x-y|)^{-N}(\forall N\in\mathbb{N})$，并且 $\int D_\alpha(x,y)\,dy=\int D_\alpha(x,y)y_j\,d_y=0\,(1\leqslant j\leqslant n)$. 因此，就回到了 $s=1$ 的情形. 由以下引理，就可以得到结论. 该引理不是显然的，我们将在第 Ⅵ 章证明它.

引理 14 设 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$，又，g 满足

$$|g(x)|\leqslant C(1+|x-X_0|)^{-n-2},\quad \int g(x)\,dx=0,\ 及$$

$$\int x_k\,g(x)\,dx=0\quad(1\leqslant k\leqslant n), \tag{9.7}$$

则对任意 $f\in\Lambda_*$，有

$$\left|\int f(x)\, g(Nx)\, dx\right| \leqslant C'\ \|f\|_{\Lambda_*}\ N^{-n-1},$$

其中 $N \geqslant 1$，而 C' 是仅依赖于 C 而不依赖于 x_0 的常数.

10. 算子 E_j 与伪微分算子

记得伪微分算子 T 是用符号 $\sigma(x, \xi)$ 定义的，而符号是 $x \in \mathbb{R}^n$，$\xi \in \mathbb{R}^n$ 的函数（有时要限制 $\xi \neq 0$）. 形式上，它由公式

$$T(e^{ix\cdot\xi}) = \sigma(x, \xi)\, e^{ix\cdot\xi} \tag{10.1}$$

定义. 这个公式在无线电测试中称为调幅.

如果符号 $\sigma(x, \xi)$ 不依赖于 x，那么算子 T 在"特征基"下是对角化的，"特征基"只在 $\xi \in \mathbb{Z}^n$ 的周期情形才是一组基. 如果符号 $\sigma(x, \xi)$ 对 x 具有一定的正则性质，那么，算子 T 是"几乎对角化"的，我们就可望它的有界性. 提醒一下，Hörmander 的 $S^0_{\rho,\delta}$ 类定义为

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x, \xi)| \leqslant C(\alpha, \beta)\,(1+|\xi|)^{\rho|\beta|-\delta|\alpha|}. \tag{10.2}$$

用 $\sigma(x, \xi)$ 去做乘法就完全破坏了函数 $e^{ix\cdot\xi}$ 的振动性，这种情形显然不应发生，为避免这种情形，在 (10.2) 中不允许有 $\rho = \delta = 1$.

算子 T 与符号 $\sigma(x, \xi)$ 通常是线性依赖的. 用 Fourier 变换来说，任一 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 f 是函数 $e^{ix\cdot\xi}$ 的叠加

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{10.3}$$

由于线性，有

$$Tf(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma(x, \xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{10.4}$$

只要 $\sigma(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，(10.4) 的方法就有意义，这是我们要讨论的例子的情形.

设 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析. 设 φ 是第 4

节算法所定义的函数，设 E_j: $L^2(\mathbb{R}^n)\to V_j$ 是正交投影算子. 那么，我们有

命题 6 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 V_j 上正交投影算子 E_j 的符号是 $\sigma(2^jx, 2^jy)$，其中，

$$\sigma(x,\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{2k\pi i\cdot x}\,\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)\bar{\hat{\varphi}}(\xi). \tag{10.5}$$

在证明这个结果之前，先对这个符号的正则性做几点解释.

首先，$\sigma(x,\xi)$ 关于变量 x 是 $\mathbb{Z}^n$ 周期的函数. 事实上，设 $\sigma(x,\xi)$ 是一个符号，T 是相应的算子，则对所有 $a\in\mathbb{R}^n$, $\sigma(x-a,\xi)$ 是 $R_aTR_a^{-1}$ 的符号，其中 $R_af(x)=f(x-a)$. 已知算子 E_0 与平移 R_k $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 可交换，因此，E_0 的符号 $\sigma(x,\xi)$ 关于 x 是 $\mathbb{Z}^n$ 周期的.

(10.5) 右边的级数是函数 $x\to\sigma(x,\xi)$ 的 Fourier 级数. 我们很容易计算它的和，这是因为，把 $k\in\mathbb{Z}^n$ 作为指标，则 $\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)$ 是周期函数 $x\to e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)$ 的 Fourier 系数序列. 这个注释由第 I 章的引理 1 得到. 于是，(10.5) 便化为

$$\sigma(x,\xi)=\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} e^{-i\xi\cdot(x+l)}\varphi(x+l)\right)\overline{\hat{\varphi}}(\xi). \tag{10.6}$$

从这个式子可以读出符号的性质. 由于 φ 的阶数不超过 r 的导数的速降性，

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)|\leqslant C(\alpha) \tag{10.7}$$

对所有的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 及满足 $|\beta|\leqslant r$ 的 $\beta\in\mathbb{N}^n$ 成立.

现在，我们使用等式 $E_0(e^{ix\cdot\xi})=\sigma(x,\xi)\,e^{ix\cdot\xi}$ 证明 (10.6). 因为 E_0 的核是 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-k)\overline{\varphi}(y-k)$，就有

$$E_0(e^{ix\cdot\xi})=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-k)\int\overline{\varphi}(y-k)\,e^{iy\cdot\xi}\,dy$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-k)\,e^{ik\cdot\xi}\,\overline{\hat{\varphi}}(\xi)=\sigma(x,\xi)\,e^{ix\cdot\xi}.$$

由此得到 (10.6).

再回到重要的等式 $E_0(x^\alpha)=x^\alpha$ ($|\alpha|\leqslant r$). 由这个等式可以得到符号的 $\sigma(x,\xi)$ 的特殊性质，我们就来解释它.

用 (10.4) 计算 $E_0(x^\alpha)$，这就是用 Schwartz 类函数逼近 x^α. 考虑函数 $f_\varepsilon(x)=x^\alpha e^{-\varepsilon|x|^2}$ ($\forall\varepsilon>0$)，它的 Fourier 变换是 $i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha g_\varepsilon(\xi)$, 其中

$$g_\varepsilon(\xi)=\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2}\exp\left(-|\xi|^2/4\varepsilon\right).$$

因此，

$$E_0(f_\varepsilon)(x)=(2\pi)^{-n}i^{|\alpha|}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\partial_\xi^\alpha g_\varepsilon(\xi)\,d\xi.$$

符号 $\sigma(x,\xi)$ 关于 ξ 无穷次可微，并且它的所有导数都是有界的. 因此，用分部积分，便有

$$E_0f_\varepsilon(x)=(-i)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n}\int\partial_\xi^\alpha\{e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\}\,g_\varepsilon(\xi)\,d\xi.\qquad(10.8)$$

而 $E_0(x^\alpha)=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}E_0(f_\varepsilon)(x)$，这是因为 E_0 的核 $E(x,y)$ 在无穷远处是 $O(|x-y|^{-m})$ (对任意 m)，因而就可以使用 Lebesque 控制收敛定理. 在 (10.8) 中取极限，便得

$$x^\alpha=(-i)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha\{e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\}_{(\xi=0)}\qquad(10.9)$$

对所有满足 $|\alpha|\leqslant r$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 成立. 于是 $\sigma(x,0)=1$ 和 $\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)$ 在 $\xi=0$ 处等于零 ($1\leqslant|\alpha|\leqslant r$).

联系到等式 (10.5)，有 $\sigma(x,0)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{2k\pi i\cdot x}\hat{\varphi}(2k\pi)=1$. 因此，当 $k\neq 0$ 时，$(\partial^\alpha\hat{\varphi})(2k\pi)=0$. 这样一步一步地做，就有 $(\partial^\alpha\varphi)(2k\pi)=0(k\neq 0,\ |\alpha|\leqslant r)$.

再回头看等式 $1=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2$.

已知该级数以及它的各阶导数的级数在任何紧集上一致收敛．刚刚得到的结果表明，$\hat{\varphi}$ 及它的直到 r 阶导数在 $2k\pi$ 处 $(k\neq 0)$ 都是零．由此，我们有以下结论．

命题 7 记号如前所述，当 $|\xi|\to 0$ 时，有 $|\hat{\varphi}(\xi)|^2=1+O(|\xi|^{2r+2})$.

我们将在第Ⅲ章用这个重要结果证明，从多分辨率分析 V_j 出发构造出来的小波的 α 阶矩 $\int x^\alpha\ \psi_\lambda\ (x)\ dx=0\ \ (|\alpha|\leqslant r)$.

最后，可以对函数 φ "作一个修正"，以便保持 φ 的所有其它性质的同时，能得到更精确的信息 $\hat{\varphi}(\xi)=1+O(|\xi|^{2r+2})$，即修正后的函数 φ 满足

$$\int\varphi(x)\ dx=1\quad \text{且}\quad \int x^\alpha\varphi\ (x)\ dx=0\quad (1\leqslant|\alpha|\leqslant 2r+2).$$

φ 所保留的其它性质是：$\varphi(x-k)\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 V_0 的一组正交基，以及导数 $\partial^\alpha\varphi(|\alpha|\leqslant r)$ 的速降性．

但是，有一种不该做这种修正的情形，即在命题 7 中要求 φ 有紧支集．这个性质在我们做的处理中会消失．

为保持 $\hat{\varphi}(0)=1$，先用一个模为 1 的常数去乘 $\hat{\varphi}$，接着用 $\alpha(\xi)$ 表示 $\hat{\varphi}(\xi)$ 的幅角在 0 点邻域上的一个连续限定．这样，只要 $|\xi|<\delta$，就有 $\hat{\varphi}(\xi)=|\hat{\varphi}(\xi)|e^{i\alpha(\xi)}$，而且 $\alpha(0)=0$，$\alpha(\xi)$ 在 $|\xi|<\delta$ 是无穷次可微的．最后，延拓 $\alpha(\xi)$ 到整个 $\mathbb{R}^n$ 成为一个以 $2\pi\mathbb{Z}^n$ 为周期的无穷次可微的实函数．记这个函数为 $\beta(\xi)$. 用 $e^{i\beta(\xi)}\hat{\varphi}\ (\xi)$ 代替 $\hat{\varphi}(\xi)$，则在 0 点的邻域有 $\hat{\varphi}(\xi)=|\hat{\varphi}(\xi)|$，这就是我们所要求的．

11. 多分辨率分析与有限元

我们回忆一下在数值分析的通常的有限元技术里"限制"和

"延拓"算子的定义. 我们想指出, 如果定义 1 中的函数 g 具有紧支集而不只是速降的, 则完全与 r 正则多分辨率分析的理论一致.

考虑取样的步长 $h>0$, 在有限元技术中要用离散的网 $h\mathbb{Z}^n$ 代替连续的空间以使 $\mathbb{R}^n$ 离散化. 记这个网为 Γ. 我们想用指标在 Γ 中的序列空间定义不同函数空间的函数逼近, 来模仿这个几何逼近.

构造出的第一个算法称为"限制", 它把 $\mathbb{R}^n$ 上函数或分布变成指标在 Γ 中的数值序列. 然后是"延拓", 它从定义在 Γ 上的一个序列出发, 外推这个序列以找到尽可能简单的函数.

这里, 我们不是在通常意义上理解"限制"及"延拓"这两个词. 事实上, 我们提出把一个 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数或分布"限制"到 Γ 上, 显然不是通常意义上的限制 (也不是 Sobolev 迹定理意义上的限制).

更出乎意料的是, "延拓"并不能得到比所能期望的更多的东西. 从一个序列 $c(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma)$ 出发, 构造一个正则函数, 它是在某种意义上"延拓"了 $c(\gamma)$, 但极少是在通常的意义上延拓了 $c(\gamma)$.

现在, 我们定义这两个算子. 从一个整数 $r\in\mathbb{N}$ 和满足以下假设的两个函数出发. 这些假设是

$\lambda\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$　λ 是紧支的, 它的积分值为 1. (11.1)

$\mu\in H^r(\mathbb{R}^n)$, μ 是紧支的, μ 的积分值是 1, 且当 $k\in\mathbb{Z}^n$, $k\neq 0$, $0\leqslant|\alpha|\leqslant r$ 时, $\partial^\alpha\hat{\mu}(2k\pi)=0$. (11.2)

把 λ 与 μ 联系起来. 当 $1\leqslant|\alpha|\leqslant r$ 时, 有

$$\iint\lambda(x)\mu(y)(x-y)^\alpha\,dx\,dy=0\quad(1\leqslant|\alpha|\leqslant r).\tag{11.3}$$

按照〔4〕, 人们定义"限制"算子 (或取样) 及"延拓"算子如下:

$$(r_h u)\ (hk) = h^{-n}\int \lambda(h^{-1}x-k)\ u\ (x)\ dx, \tag{11.4}$$

其中，$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$，$k \in \mathbb{Z}^n$，及

$$(p_h u_h)\ (x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_h\ (hk)\ \mu\ (h^{-1}x-k). \tag{11.5}$$

J. P. Aubin 在〔4〕中证明了，从条件（11.1）、（11.2）、(11.3) 可以得到，若 $0\leqslant s\leqslant r$，$u\in H^s(\mathbb{R}^n)$，则当步长 h 趋于 0 时，$p_h r_h(u)$ 按 H^s 模收敛于 u.

请注意，加在 λ 上与加在 μ 上的条件是不相同的．为使（11.5）的右端属于 $H^r(\mathbb{R}^n)$，μ 也应该有同样的要求．然而，当 $u\in H^s$ $(0\leqslant s\leqslant r)$ 时，为定义（11.4），$\lambda\in L^\infty$ 就够了．当 u 是一个属于 $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ 的分布时，r_h 的定义就不再适用．在有限元技术中，逼近分布是使用（11.4）及（11.5）的共轭形式．

最后，当给出了 μ，而 μ 满足条件（11.2）时，容易构造 λ，使得（11.3）成立．事实上，后一个性质可以写成 $\int x^\alpha\lambda\ (x)\ dx = C\ (\alpha,\mu)\ (|\alpha|\leqslant r)$．对任意 $\delta>0$，可以找到一个无穷次可微的、支在球 $|x|\leqslant\delta$ 内的函数 λ，使它的不超过 r 阶的矩是事先规定好了的．

再次回到 r 正则多分辨率分析．设定义 1 中的函数 $g\ (x)$ 有紧支集．我们证明过，当 $k\in\mathbb{Z}^n$，$k\neq 0$，$|\alpha|\leqslant r$ 时，$(\partial^\alpha\hat{\varphi})\ (2k\pi)=0$．总可以假设 $\hat{\varphi}(0)=1$，这可由乘一个模为 1 的常数到 $\hat{\varphi}$ 而实现．$\hat{\varphi}$ 和 $\hat{g}$ 之间的关系是

$$\hat{g}\ (\xi)=\hat{\varphi}\ (\xi)\ (\sum|\hat{g}\ (\xi+2k\pi)|^2)^{1/2}. \tag{11.6}$$

此外，我们还证明过，右边的级数是无穷次可微的、严格正的函数．因此，

$$\partial^\alpha\hat{g}\ (2k\pi)=0 \quad (k\in\mathbb{Z}^n,\ k\neq 0,\ |\alpha|\leqslant r).$$

如果函数 g 是紧支集的，那么它恰恰具有（11.2）为定义

"延拓算子"所规定的性质.

在多分辨率分析中，取样的步长是 $h=2^{-j}$，应用的网是 $\Gamma_j=2^{-j}\mathbb{N}$. 我们记"延拓算子"为 P_j，P_j 把一个平方可和序列 $\alpha(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma_j)$ 映成 V_j 空间的函数 $f(x)=\sum_{\alpha\in\Gamma_j}\alpha(\gamma)\,g(2^j(x-\gamma))$.

正象已指出的那样，容易把另一个具有紧支集的（也可以具有我们想要的正则性）函数与 g 联系起来而构造一个有限元理论意义上的"限制算子"（或取样）. 我们在本章不打算构造这样的算子，只是指出：$f\in V_j$ 在 Γ_j 上的限制不是用来构造 f 的序列 $\alpha(\gamma)$. 如果用来定义限制的函数 λ 具有紧支集，而 $\overline{\lambda}(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 又是 $g(x-k)$ 的共轭基，则是这种情形. 在 r 正则的多分辨率分析中，这些共轭基 $h(x-k)$ 总是存在的；从第 4 节中计算的直接修正就可得到

$$\hat{h}(\xi)=\hat{g}(\xi)\left(\sum|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{-1}.$$

现在回到由样条函数的嵌入空间组成的多分辨率分析的例子. 我们看到，所构造的函数 h 在 $r\geqslant 1$ 时不总是有紧支集的.

我们将在第Ⅲ章证明，对任意的 $r\in\mathbb{N}$，存在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析，使得相应的函数 φ 有紧支集. 于是由

$$P_j\alpha(x)=\sum\alpha(2^{-j}k)\varphi(2^jx-k)$$

和

$$(R_jf)(2^{-j}k)=2^{nj}\int f(u)\overline{\varphi}(2^ju-k)\,du$$

定义的延拓算子 P_j 和限制算子 R_j 具有重要性质：$R_jP_j=I$，并且 R_j: $L^2(\mathbb{R}^n)\to l^2(\Gamma_j)$ 是 P_j: $l^2(\Gamma_j)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的共轭.

由这个很特殊的性质，我们能够（也应该）用这些算子离散化分布 $f\in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ $(0<s\leqslant r)$.

因此，多分辨率分析是作为有限元方法的一种新形式而出现. 然而存在观点上的区别. 正象物理学家把"网逼近"用于量子场论的计算，我们提出了所用网的相容性关系 $\Gamma_j\subset\Gamma_{j+1}$. 这

个关系可以译成函数集合的包含关系 $V_j \subset V_{j+1}$. 由这个包含关系，可以从式子 $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ 中定义一种**变更空间** W_j，它将在第Ⅲ章中起决定性的作用.

在多分辨分析中，**逐次逼近动力学**是不可缺少的. 我们没有优先考虑使基函数（g 或 φ）有紧支集的算法，对速降函数已经满意了.

在有限元技术中，这种逐次逼近动力学是不存在的，除非我们对曲线进行一次又一次的细化. 然而总也不能达到我们作的那样重复到无穷次.

12. 例: Littlewood－Paley 多分辨率分析

在第 2 节的 Littlewood－Paley 多分辨率分析这个特殊情形中，我们使用公式（10.5），它给出了算子 E_0 的符号 $\sigma(x, \xi)$. 让我们回忆一下，如果 $-\frac{2\pi}{3} \leqslant \xi \leqslant \frac{2\pi}{3}$ 时，$\hat{\varphi}(\xi)=1$，又当 $|\xi| > \frac{4\pi}{3}$ 时，$\hat{\varphi}(\xi)=0$; $\hat{\varphi}(-\xi)=\hat{\varphi}(\xi)$，$\hat{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$，$\hat{\varphi}(\xi) \geqslant 0$; 最后还有，当 $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$ 时，$(\varphi(\xi))^2 + (\hat{\varphi}(2\pi-\xi))^2 = 1$.

现在，公式（10.5）最多只有 3 项. 中间一项 $(\varphi(\xi))^2$ 是一个卷积算子的符号. 记这个算子为 S. 其它两项对应于 $k=1$ 与 $k=-1$. 设 $\eta(\xi)=\hat{\varphi}(\xi-2\pi)\hat{\varphi}(\xi)$. 函数 η 支在 $\frac{2\pi}{3} \leqslant \xi \leqslant \frac{4\pi}{3}$ 上，它满足 $\eta(2\pi-\xi)=\eta(\xi)$. 我们用 Δ^+ 记相应的卷积算子.

最后，设 $\theta(\xi)=\hat{\varphi}(\xi+2\pi)\hat{\varphi}(\xi)$，$\theta$ 就支在 $-\frac{4\pi}{3} \leqslant \xi \leqslant -\frac{2\pi}{3}$ 上，用 Δ^- 记相应于 θ 的卷积算子. 这样，由（10.5）得到下面的等式.

命题 9　在 Littlewood－Paley 多分辨率分析中，算子 E_j 由下

式给出

$$E_j = S_j + M_j\Delta_j^- + M_j^{-1}\Delta_j^+, \tag{12.1}$$

其中，M_j 是用 $\exp(2\pi i 2^j x)$ 去逐点相乘的算子，Δ^+ 和 Δ^- 从 Fourier 变换角度看是由乘子 $\eta(2^{-j}\xi)$ 和 $\theta(2^{-j}\xi)$ 定义的算子.

(12.1) 的右边由三项组成：主项和两个误差项. 主项是由卷积算子给出的传统的恒等逼近. 两个误差项与两个频率区间 $\left[\frac{2\pi}{3}2^j, \frac{4\pi}{3}2^j\right]$ 和 $\left[-\frac{4\pi}{3}2^j, -\frac{2\pi}{3}2^j\right]$ 有关，也与由 Fourier 变换分别支于这两个区间的函数组成的 $L^2(\mathbb{R})$ 的两个子空间 U_j 和 V_j 有关. 应注意到下面的事实：$M_j: V_j \to U_j$ 是保范同构；并且 $M_j\Delta_j^-$ 的象是 U_j，同样地，$M^{-1}\Delta_j^+$ 的象是 V_j.

这两个误差项在算子强收敛意义上对所有的函数空间（除了 L^∞ 和一些明显的空间外）趋于 0.

我们以后将介绍怎样用这个等式来很简单地构造圆盘代数 $A(D)$ 上的 Schauder 基.

我们来计算 $D_j = E_{j+1} - E_j$. 设 $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$，有

$$D_j = \Delta_j + R_j, \tag{12.2}$$

其中，

$$R_j = M_{j+1}\Delta_{j+1}^- + M_{j+1}^{-1}\Delta_{j+1}^+ - M_j\Delta_j^- - M_j^{-1}\Delta_j^+. \tag{12.3}$$

主项是 Δ_j，误差项是 R_j. 主项就是在传统的 Littlewood－Paley 分析中所使用的东西. 这就是为什么我们称这个多分辨分析为 Littlewood－Paley 分析的原因. 这是一个性质上更接近于通常的 Littlewood－Paley 分析的多分辨率分析.

在结束本节之际，我们来计算 r 阶样条多分辨率分析中的函数 φ.

从 $[0, 1)$ 区间的特征函数 $\chi(x)$ 出发. 设 $g(x) = \chi * \cdots * \chi$（$r+1$ 项）. 对支集包含于 $[a, b]$（$[a, b]$ 应具有最短长度）的 V_0 中的函数，对 $k \in \mathbb{Z}$ 平移后，再进行展缩. 我们有 $\hat{g}(\xi) =$

$\left(\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^{r+1}$.

使用这个函数，定义 φ 如下：

$$\hat{\varphi}(\xi)=\hat{g}(\xi)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{-1/2}.$$

为了叙述得更细，我们区分两种情形．若 r 是奇数，设 $r=2s-1$ $(s\in\mathbb{N})$，则 $\hat{g}(\xi)=\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^{2s}e^{-i\xi s}$.

用 $g(x+s)$ 代替 $g(x)$，没有改变 $g(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是 V_0 的一组 Riesz 基这一基本性质．最终得到 $\hat{g}(\xi)=\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^{2s}$

现在计算

$$\left(\sum|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{1/2}=(\sin\xi/2)^{2s}\left(\sum(\xi/2+k\pi)^{-4s}\right)^{1/2}.$$

从等式 $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+k\pi}=\frac{\cos z}{\sin z}$ 出发，求 $q-1$ 次导数，得

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+k\pi)^q}=\frac{P_q(\cos z)}{(\sin z)^q},\tag{12.4}$$

其中，P_q 是 $\cos z$ 的 $q-2$ 次多项式．若 q 是偶数，从（12.4）显然可看出，在 $[0,1]$ 上 $P_q(t)$ 是严格正的．再来计算 $\hat{\varphi}(\xi)$. 由 $r+1=2s$，知

$$\hat{\varphi}(\xi)=\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^{2s}(P_{4s}(\cos\xi/2))^{-1/2}.$$

根据命题 7，在 $\xi=2k\pi$ $(k\neq0)$ 处，$\hat{\varphi}(\xi)$ 的直到 r 阶导数都取值 0.

现设 r 是偶数．对整个 $g(x)$ 作平移后，有 $\hat{g}(\xi)=\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^{r+1}\cdot e^{-i\xi/2}$．即 $g(x)$ 以 $x=\frac{1}{2}$ 为中心而不是以 0 为中心．计算 $\hat{\varphi}(\xi)$ 与

我们刚刚作的相似，其结果是

$$\hat{\varphi}(\xi)=\left(\frac{\sin\ \xi/2}{\xi/2}\right)^{r+1}e^{-i\xi/2}\ (P_{2r+2}(\cos\ \xi/2))^{-1/2}.$$

我们看到，φ 是中心在 $x=\frac{1}{2}$ 处的实函数．与前面情形一样，在 $\xi=2k\pi$ $(k\neq0)$ 处，$\hat{\varphi}(\xi)$ 的 $\leqslant$ 阶导数取 0 值．

13. 注释与述评

多分辨率分析的概念是作者与 S. Mallat合作引入的（1986秋，〔178〕). S. Mallat 把这个概念与数值图象处理的算法联系了起来．比如，在平面上，$f(x, y)$ 是理想的图象（绝对精确的），而 $f_j(x, y)$ 表示这个理想图象的一个逼近，这个逼近的分辨率（的大小的数量级）是 2^{-j}.

我们不打算给出构造所有 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 多分辨率分析的一般方法．在第Ⅲ章中将叙述 S. Mallat 的一种算法，它给出了已知的所有 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 多分辨率分析．将用这个算法证明，对任意 $r\in\mathbb{N}$，紧支集小波正交基的存在性（I. Daubechies).

多分辨率分析的概念使 G. Deslauriers 和 S. Dubuc 在二进插值名义下引入的算法一般化了．Deslauriers 和 Dubuc 的工作在我们的工作之前，是用来构造分形曲线的（〔100〕，〔101〕）．这里，将对 Deslauries 和 Dubuc 的想法作简短的叙述，我们有意用第Ⅲ章 Mallat 算法的语言来写它．

从显然的包含关系 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}/2$ 出发，我们希望尽可能忠实地模仿它以得到“泛函的包含关系” J: $l^\infty(\mathbb{Z})\to l^\infty(\mathbb{Z}/2)$. 为此，用 τ_k: $l^\infty(\mathbb{Z})\to l^\infty(\mathbb{Z})$ 表示（由 $\tau_k f(x)=f(x-k)$）定义的平移算子 $(k\in\mathbb{Z})$. 虽然语言上有点混淆，我们也用 τ_k 表示作用于 $l^\infty(\mathbb{Z}/2)$ 上的平移算子．

这样，要求 J 有下面三个性质:

(a) J: $l^\infty(\mathbb{Z}) \to l^\infty(\mathbb{Z}/2)$ 是一个线性连续算子，并且这个算子当 $l^\infty(\mathbb{Z})$ 和 $l^\infty(\mathbb{Z}/2)$ 分别带有弱拓扑 $\sigma(l^\infty(\mathbb{Z}), l^1(\mathbb{Z}))$ 及 $\sigma(l^\infty, (\mathbb{Z}/2), l^1(\mathbb{Z}/2))$ 时仍是连续的；

(b) $J\tau_k = \tau_k J$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$；

(c) 对所有的 $l^\infty(\mathbb{Z})$ 中的序列 f, $J(f)$ 是 $l^\infty(\mathbb{Z}/2)$ 的一个序列，它在 $\mathbb{Z}$ 上的限制与 f 一致.

因此，算子 J 就是把仅定义在 $\mathbb{Z}$ 上的序列延拓到 $\mathbb{Z}/2$ 上的算子. 我们用 ε_k 表示第 k 项为 1, 其它项为零的 $l^\infty(\mathbb{Z})$ 中的序列. 用 $J(\varepsilon_0)(\frac{l}{2}) = \omega(l)$ $(l \in \mathbb{Z})$ 定义算子 J 的符号. 于是，从 (b) 就得到 $J(\varepsilon_k)(\frac{l}{2}) = \omega(l-2k)$. 由于线性与连续性，最后得到

$$J(f)(l/2) = \sum_{-\infty<k<\infty} f(k)\,\omega(l-2k). \tag{13.1}$$

符号 ω 完全决定了算子 J. 性质 (c) 等价于 $\omega(0)=1$ 及 $\omega(2k)=0$ $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$. 反之，具有这最后一个性质的任何序列 $\omega \in l^1(\mathbb{Z})$ 都构造了一个满足 (a), (b), (c) 的算子.

通过简单的尺度变换，算子 J 变成算子 J_m: $l^\infty(2^{-m}\mathbb{Z}) \to l^\infty(2^{-m-1}\mathbb{Z})$, 它满足性质 (a), 它与平移 2^{-mk} 可交换，并且它把 $l^\infty(2^{-m}\mathbb{Z})$ 中的序列延拓到 $l^\infty(2^{-m-1}\mathbb{Z})$ 中的序列. 此外，J_m 像 J 一样，是由序列 $\omega(l)$ $(l \in \mathbb{Z})$ 所决定的，即 $J_m(\varepsilon_0)$ 是在 $2^{-m-1}l$ 处取值 $\omega(l)$ $(l \in \mathbb{Z})$ 的序列.

下一步是用嵌入子空间 $2^{-m}\mathbb{Z}$ $(m \in \mathbb{Z})$ 的上升序列来"逼近" $\mathbb{R}$. 从任一列 $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ 出发，我们可以往下延拓成 $f_1 \in l^\infty(\mathbb{Z}/2)$, $\cdots$, $f_m \in (2^{-m}\mathbb{Z})$. 这时有 $J_m(f_m) = f_{m+1}$, 其中，

$$f_{m+1}(2^{-m-1}l) = \sum_{-\infty<k<\infty} f_m(2^{-m}k)\,\omega(l-2k). \tag{13.2}$$

收敛性问题在于知道是否存在一个 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f_∞, 对

$\forall m \in \mathbb{N}$, 它在 $2^{-m}\mathbb{Z}$ 上的限制与 f_m 一致.

为回答这个问题，只需考查在特殊情形 $f=\varepsilon_0$ 时对与否. 把相应的函数 f_∞ 记为 g, 设 $g\ (x)$ 是连续的，我们也将有 $g \in L^1(\mathbb{R})$. 由此，一般化，就得到 $f_\infty\ (x)=\sum f\ (k)\ g\ (x-k)$.

收敛问题仍还没解决，但由 Deslauries 和 Dubuc 的工作，我们提出了充分条件. 这两位作者也计算了 g 的 Fourier 变换（假设它存在）. 他们看到，测度 $g(x)\,dx$ 是 "Riemann 和" $\mu_m=2^{-m}\cdot\sum g^{(2^{-m}k)}\delta_{(2^{-m}k)}$ 的弱极限，其中 δ_a 表示在 a 点的 Dirac 质量. 设 $\sigma_m=\frac{1}{2}\sum\omega\ (l)\delta_{(2^{-m}l)}$, 则 $\mu_m=\sigma_1 * \cdots * \sigma_m$. 记 $\gamma\ (\xi)=\frac{1}{2}\sum\omega(l)\,e^{il\xi}$, 就有

$$\hat{g}\ (\xi)=\prod_1^\infty\gamma\ (2^{-m}\xi). \tag{13.3}$$

仅当 $\gamma(0)=1$ 时，这个无穷级数收敛. 即，若用 $1 \in l^\infty\ (\mathbb{Z})$ 表示各项都是 1 的常数级数时，就有 $J\ (1)=1$.

最后，设造出的函数 $g\ (x)$ 对某个整数 $r \in \mathbb{N}$ 满足 (2.6). 我们用 V_0 表示从属于 $l^2\ (\mathbb{Z})$ 的（不是属于 $l^\infty\ (\mathbb{Z})$ 的）序列 $f(k)$ 出发得到的极限函数 f_∞ 的集合所构成的向量空间，换言之，$f\in V_0$ 当且仅当

$$f\ (x)=\sum\alpha_k g\ (x-k) \qquad (\alpha_k=f\ (k) \in l^2\ (\mathbb{Z})\ ). \tag{13.4}$$

于是，V_0 是 $L^2\ (\mathbb{R})$ 的一个子空间，而 $g\ (x-k)\ (k \in \mathbb{Z})$ 是 V_0 的 Riesz 基. 此外，还存在 $L^2\ (\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析 $V_j\ (j \in \mathbb{Z})$, 它以 V_0 为出发点.

这个多分辨率分析具有 (13.4) 所述的特点，即 $g(0)-1$, $g(k)=0\ (k \in \mathbb{Z},\ k\neq 0)$.

反之，设 $V_j\ (j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2\ (\mathbb{R})$ 的一个 r 正则 $(r\geq 1)$ 多分辨率分析，使得函数 $g\ (x)$ 除了满足 (2.4) 和 (2.6)，还满足条件 $g(k)=0\ (k \in \mathbb{Z},\ k\neq 0)$ 及 $g\ (0)=1$. 则这个多分辨率分析来源于一种二进插值的算法，其中 $\omega(l)=g(\frac{l}{2})\ (l \in \mathbb{Z})$.

特别地，由奇数阶样条的嵌入空间所给出的多分辨率分析来源于二进插值的方法，这时序列 $\omega(l)$ $(l \in \mathbb{Z})$ 具有指数下降性.

第三个例子中的 Littlewood－Paley 多分辨率分析同样来源于二进插值算法，这时，$\omega(l)$ 是速降的.

Daslauriers 和 Dubuc 只限于考虑除了 $\omega(0)=1$ 外仅由四个值 $a=\omega(3)$，$b=\omega(1)$，$c=\omega(-1)$ 和 $d=\omega(-3)$ 构成的“短序列”，他们想合理地调整 a, b, c, d 来造出一个函数 g (x)，它是一个分形构造.

在下章里，比较由 Deslauriers 和 Dubuc 定义的算子 J 和由 S. Mallat 所导入的它的类似物将是有意思的. 后者是部分保范的 J: l^2 $(\mathbb{Z}) \to l^2$ $(\mathbb{Z}/2)$，它与平移可交换，并且满足允许“从离散走向连续”的正则性条件.

第Ⅲ章　小波正交基

1. 引　言

设 $m \in \mathbb{Z}$ 是一个整数. 如果一个实变量的函数 $\psi(x)$ 满足以下看上去矛盾的四个性质, 则称它是一个 **m 类的小波 (基)**. 这些性质是:

(a) 若 $m=0$, 那么 $\psi(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$; 若 $m \geqslant 1$, 则 $\psi(x)$ 及它的直到 m 阶的导数都属于 $L^{\infty}(\mathbb{R})$.

(b) $\psi(x)$ 及其直到 m 阶的导数在无穷远处都是速降的;

(c) 对 $0 \leqslant k \leqslant m$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x)\, dx=0$;

(d) 函数 $2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x-k)$ $(j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$ 的集合构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基.

函数 $2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x-k)$ $(j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$ 称为由"母亲" ψ 生成的小波, 而条件 (a), (b) 和 (c) 分别表示加到"小波的母亲"上的**正则性**、**局部性**及**振动性**. 由简单的尺度变换, 知小波本身也满足这些条件. 确切地说, 如果用 I 表示二进区间 $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$, 并设 $\psi_I=2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x-k)$, 用 $\mathscr{I}$ 记所有二进区间 I 的集合, 那么, ψ_I **本质上是集中在区间 I 上**. 即对 $M \geqslant 1$, 让 MI 表示与 I 有相同中心, 但长度为 I 的 M 倍的区间, 记

$$\left(\int_{(MI)^c} |\psi_I(x)|^2\, dx\right)^{1/2}=\varepsilon(M),$$

则 $\varepsilon(M)$ 当 M 趋于无穷时是速降的. 这里, E^c 表示 E 在 $\mathbb{R}$ 中的余集.

条件 (c) 显然意味着：**小波 ψ_I 的 $k \leqslant m$ 阶矩是零**. (这是小波 ψ_I 的振动条件.)

条件 (b) 可以写成：对任意 $N \geqslant 1$, 对 $0 \leqslant k \leqslant m$,

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^k \psi_I\ (x)\right| \leqslant C_N 2^{j/2} 2^{jk} (1+|2^j x-k|)^{-N}.$$

此式表达了**小波 ψ 的正则性及局部性**.

函数 ψ_I 是 (由 ψ 生成的) 小波. 由定义，一个实直线上给定的函数的小波级数分解是等式

$$f\ (x)=\sum_{I \in \mathscr{I}} \alpha\ (I)\psi_I(x)\ ,\ \text{其中},\ \alpha(I)=(f,\ \psi_I). \tag{1.1}$$

当 $f \in L^2\ (\mathbb{R})$ 时，由于 (1.1) 式右边按 $L^2\ (\mathbb{R})$ 模收敛到 $f\ (x)$, 这个等式完美无缺地成立. 当 $1<p<\infty$ 时，该等式仍有效. (1.1) 式右边收敛于 f, 而且右边的级数是交换收敛的 (即在收敛过程中，级数项的顺序不起任何作用，因为 $\mathscr{I}$ 不是有序集合，这是合理的).

然而，当 $f\ (x)$ 属于 $L^\infty\ (\mathbb{R})$ 或 $L^1\ (\mathbb{R})$ 时，(1.1) 式就没用了.

例如，当 $f\ (x)$ 恒等于 1 时，f 的所有小波系数都是零，从 (1.1) 式得 $1=0$, 这是荒谬的. 同样地，若 $f\ (x)$ 是任何一个 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 中的积分值为 1 的函数，则 (1.1) 式的右边不能依 $L^1\ (\mathbb{R})$ 模收敛. 如果不然，在 (1.1) 式右边逐项积分，还是有矛盾 $1=0$. 这个困难将成为第 V 章的出发点. 然而，级数 (1.1) 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中的收敛性 $(1<p<\infty)$ 将与 Calderon－Zygmund 算子的一般理论联系起来，而这个理论将在第Ⅶ章中叙述.

如果引入第二个函数 $\varphi(x)$, 我们称它为“小波的父亲” (函数 $\psi\ (x)$ 是“小波的母亲”)，则刚才碰到的困难就消失了. $\varphi\ (x)$ 与 $\psi\ (x)$ 一样，具有性质 (a) 和 (b)，但用条件 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (x)\ dx=1$ 代替了条件 (c), 又用条件“$\varphi(x-k)\ (k \in \mathbb{Z})$ 与 $\psi_I\ (I \in \mathscr{I},\ |I| \leqslant 1)$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基”来代替（d）.

这样，我们有

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\varphi(x-k)+\sum_{\{I\in\mathscr{I},|I|\leq 1\}}\alpha(I)\psi_I(x), \tag{1.2}$$

其中，

$$\beta_k=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\varphi}(t-k)\,dt \quad 及\ \alpha(I)=(f,\psi_I).$$

这次，第二个和式仅在“小的二进区间” $I\in\mathscr{I}$ 上取．形象地说，$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\varphi(x-k)$ 是 $f(x)$ 的第一个近似，是 $f(x)$ 的一个“**模糊不清的象**”；我们补全它的越来越精细的细节以使它精确．第一级细节是由长度为 1 时的 $\alpha(I)\psi_I(x)$ ($|I|=1$) 给出的；以下的细节更小，长度为 $\frac{1}{2}$，……；这些小修正是按尺寸有规则地做（长度为 2^{-j} 的细节放在点 $k2^{-j}$ 处）.

自然，算法（1.2）比算法（1.1）好得多，它可以避免算法（1.1）用于非 $L^2(\mathbb{R})$ 函数时产生的错误．

算法（1.2）蕴含着算法（1.1）．在（1.2）中作一个简单的变量替换，就可以看到这点．我们就得到

$$f(x)=\sum_{k}\beta_k\varphi(2^lx-k)+\sum_{\{I\in\mathscr{I},|I|\leq 2^{-l}\}}\alpha(I)\psi_I(x), \tag{1.3}$$

其中，

$$l\in\mathbb{Z},\ \beta_k=2^l\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\varphi}(2^lt-k)\,dt.$$

设 $f\in L^2(\mathbb{R})$，并让 $l\to-\infty$，在极限的情形就得到了（1.1）.

但我们不知道是否（1.1）蕴含着（1.2），问题在于函数 φ 的存在性及正则性．

如果我们提出算法（1.2），这意味着小波 ψ_I 来源于 m 正则

的多分辨率分析. 事实上，设 V_j ($j \in \mathbb{Z}$) 是 L^2 ($\mathbb{R}$) 的闭子空间，它的正交基是 $2^{\frac{l}{2}}\varphi(2^l x-k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的集合；设 W_l 是 V_l 在 V_{l+1} 中的正交补，则 (1.2) 恰恰指出：函数 $2^{\frac{l}{2}}\psi(2^l x-k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 构成了 W_l 中的正交基.

分解 (1.2) 在应用上极其灵活，这点特别重要. 例如，当 ψ 与 φ 这两个函数都具有紧支集时，用它就可以分析任何阶数小于 m 的分布. 因为函数 $\varphi(x-k)$ 与 ψ_I 是试验函数，右边的级数在分布意义上收敛于 $f(x)$，并且数积 β_k 和 $\alpha(I)$ 是有意义的.

用级数 (1.2)，一般的分布可以用正确地被局部化的并且具有特征形式的波的级数来分析. 不仅如此，在第Ⅵ章中我们将看到：可以直接用小波系数的大小精确地计算被分析的分布 f 的阶 (在传统的 Fourier 分析中，我们有一种估计的方法，但它仅在 Sobolev 空间的情形是精确的).

现在要过渡到 n 维情形，我们还要指出在构造小波正交基时深邃的几何想法.

从 $\mathbb{R}^n$ 的网 $\Gamma_j=2^{-j}\mathbb{Z}$ 出发，它形成一个嵌入序列，它的併在 $\mathbb{R}^n$ 中稠. L^2 ($\mathbb{R}^n$) 用闭子空间序列 V_j 逼近，正是模仿并反映了用网 Γ_j 的嵌入序列作 $\mathbb{R}^n$ 的几何逼近.

我们用 Λ 表示 $\Gamma_j \setminus \{0\}$ 的併，用 Λ_j 表示 Γ_{j+1} 中不属于 Γ_j 的点. 于是 Λ_j ($j \in \mathbb{Z}$) 构成了 Λ 的一个分解. 此外，$\Lambda_j=2^{-j}\Lambda_0$，$\Lambda_0=\mathbb{Z}^n+\dfrac{1}{2}E$，其中 E 是由 2^n-1 个点 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 组成，$\varepsilon_j=0$ 或 1，但 E 不包含 $(0, \cdots, 0)$.

比较这个 L^2 ($\mathbb{R}^n$) 的函数分析与 $\mathbb{R}^n$ 的几何分析，可以预见，集合 Λ_j 是用于在 V_j 对 V_{j+1} 的正交补上的取样. 换言之，$V_{j+1}=V_j \oplus W_j$ 对应于 Γ_{j+1} 是 Γ_j 与 Λ_j 的不相交的併. 再回到公式 (1.3)，V_{j+1} 的正交基是由第Ⅱ章构造的 V_j 的正交基 φ_λ ($\lambda \in \Gamma_j$)

再加上我们在本章要构造的 W_j 的正交基 ψ_λ ($\lambda \in \Lambda_j$) 组成的.

与一维情形相同，小波的局部性、形状及正则性是由 λ 的几何位置以及使 $\lambda \in \Lambda_j$ 的整数 j 所决定的. 更确切地说，

(a) ψ_λ "集中在 λ 附近"，即 ψ_λ 具有尺度 2^{-j}，离开 λ 是速降的.

(b) ψ_λ 的不超过 r 的各阶导数，按尺度 2^{-j} 计算是速降的，整数 r 表示用于构造小波的多分辨率分析的正则性.

(c) 对任意 $\lambda \in \Lambda$, 和任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 且 $|\alpha| \leqslant r$, 有 $\int x^\alpha \psi_\lambda(x)\, dx = 0$.

(d) 若 $\lambda = 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in E$, 则 $\psi_\lambda(x) = 2^{nj/2}\psi^\varepsilon(2^j x - k)$ ($j \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$)；而 ψ^ε 是 $2^n - 1$ 个小波基函数. 在本章中，我们将明确给出它.

(e) ψ_λ ($\lambda \in \Lambda$) 构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一组正交基. 许多作者已使用了类似小波正交基的构造.

比如，张圣蓉，R. Feffeman 和 A. Uchiyama 已经把 BMO 空间分解成类似于 (1.1) 的级数，但是级数的项是"伪正交的"，而不是正交的. 缺乏正交性对于他们的目的并不重要. M. Frazier、B. Jawerth 和 I. Daubechies 以及 A. Grossmann (〔114〕〔90〕) 已经引入了一个类似于 (1.1) 的方法，其中系数是用很像内积的方法计算的. 但是他们使用了由过多的函数 ψ_I 组成的集合. 这样，尽管他们幸运地提出了一种分解，但是该分解没有唯一性. 缺乏唯一性妨碍寻找加在小波级数 $\sum \xi(I)\psi_I(x)$ 的系数上的充分必要条件，以刻划该级数的和属于某个给定的函数空间. 我们将在一般系数的情形给出充分条件，或对由 $\alpha(I) = \langle f, \psi_I \rangle$ 表示的特殊系数给出充分必要条件.

L. Carleson 在寻找 Hardy(实的)空间 H^1 的无条件基时，已经使用了一族形如 $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ ($j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$) 的函数，其中 ψ 是

定义 Haar 系的函数 h (x) 的光滑化. 它们不是正交基, 但 Carleson 用它作了共轭基的十分巧妙的估计.

与此不同, P. Wojtaszczyk 证明了 Franklin 系是 H^1 的一组无条件基 (〔237〕). Franklin 系是 L^2 的一组正交基, 但没有简单的代数结构. Wojtaszczyk 的工作是基于对 Franklin 系的函数的细致的渐近估计上, 而这个估计是由 Z. Ciesielsky 给出的.

最终的 "小波发现者" 是 J. O. Strömberg. 在〔223〕中, 他证明了: 对任何整数 $m \geq 1$, 存在一个 C^m 类的、在无穷远处指数下降的函数 ψ (x), 使得序列 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ $(j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基. 在同一工作中, Strömberg 描绘了相应的函数 φ, 由此得到了多维小波. 我们将在第 12 节讲述 Strömberg 的构造. 该构造很特殊, 不能用于样条函数以外的情形. 这就是为什么我们最终愿意用第 2 节将介绍的方法构造小波的原因.

可以使用小波正交基重新得到经典函数空间的无条件基的结果.

Z. Ciesielski 和 T. Fiegel 已经为有界或无界的无穷次可微变量 (记为 X) 构造了 L^2 (X) 的正交基 φ_k, 它也是阶数小于 m 的所有 Sobolev 空间或 Besov 空间的无条件基 ($m \geq 1$ 是一个整数, 但是基依赖于 m) (〔58〕).

Botchkariev 已经证明了, 可以用 Franklin 系构造圆盘代数 A (D) 或多圆盘上相应代数的 Schauder 基. 然而, 我们将看到, 使用小波可以保留 Botchkariev 的所有想法而同时消除了他的证明中的技术困难.

最后, 小波正交基还参与到数学物理中去了. 几个研究场构造的小组也预见了小波基并宣布了它的存在性 (〔8〕, 〔9〕, 〔10〕). 使用小波基可以简化重正规化演算, 并使它更清楚.

2. 一维小波的构造

用小波级数来进行分析，目的在于同时与传统的 Fourier 级数、Fourier 积分和 Fourier 分析竞争．但是在研究中，应该谦虚地注意到，使用 Fourier 变换对构造来源于 r 正则多分辨率分析的小波基 ψ 本身（或“小波的母亲”）是不可缺少的．

设 V_j ($j \in \mathbb{Z}$) 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 的 r 正则多分辨率分析．在第二章里我们已经知道构造具有以下两个性质的函数 $\varphi \in V_0$:

对任意 $N \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant r$, 有

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^k \varphi(x)\right| \leqslant C_N (1+|x|)^{-N}, \tag{2.1}$$

并且

$$\varphi(x-k)\ (k \in \mathbb{Z}) \text{ 是 } V_0 \text{ 的正交基}. \tag{2.2}$$

函数 φ 的存在是构造 ψ 的出发点（“小波的母亲”是从“小波的父亲”得到的!）．

我们由描绘 $f \in V_0$ 的 Fourier 变换组成的子空间 $\mathscr{F} V_0$ 开始．

引理 1 函数 $g \in \mathscr{F} V_0$ 可以写成 $g(\xi)=m(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, 其中, $m(\xi)$ 属于 $L^2[0, 2\pi]$，它以 2π 为周期，并且 $\|g\|_2=\left(\int_0^{2\pi}|m(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$.

证明是直接的．这是因为从等式 $f(x)=\sum \alpha_k \varphi(x-k)$ 出发，作 Fourier 变换，就有

$$\hat{f}(\xi)=\left(\sum \alpha_k e^{-ik\xi}\right) \hat{\varphi}(\xi)=m(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

为结束证明，只需指出

$$\|f\|_2=\left(\sum |\alpha_k|^2\right)^{1/2}=(2\pi)^{-1/2}\left(\int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2\ d\xi\right)^{1/2}.$$

我们将把引理 1 作为一个字典来使用，用它可以把 V_0 中的计算变成对以 2π 为周期的函数 $m(\xi)$ 的计算．而后者为我们更熟悉的．

现在应指出我们打算要做的事了．设 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 r 正则多分辨率分析，W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补．注意到：若 $f(x) \in W_j$，则 $f(2x) \in W_{j+1}$．反之亦然．

我们想证明以下结果．

定理 1 存在函数 $\psi \in W_0$，具有以下性质：对所有 $m \geq 1$，及 $0 \leqslant q \leqslant r$，

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^q \psi(x)\right| \leqslant C_m(1+|x|)^{-m}, \tag{2.3}$$

$$\text{序列 } \psi(x-k)\ (k \in \mathbb{Z}) \text{ 是 } W_0 \text{ 的正交基}. \tag{2.4}$$

由一个简单的尺度变换可以得到，序列 $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是 W_j 的正交基，其中，j 是固定的．因为 $L^2(\mathbb{R})$ 是 W_j 的正交和，把所有序列 $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$ $(j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$ 放到一起，就得到 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基．

此外，为构造 ψ 而使用的方法本身也给出了性质：对 $0 \leqslant q \leqslant r$，有

$$\int x^q \psi(x)\, dx = 0 \quad (0 \leqslant q < r)$$

为了证明这个定理，我们要构造 $\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \in W_{-1}$，而不是构造 $\psi(x) \in W_0$．为此，先来刻划子空间 $\mathscr{F}V_{-1} \subset \mathscr{F}V_0$．注意到

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(x+k) \\ &\text{其中，} 2\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x/2)\overline{\varphi}(x+k)\, dx \end{aligned}} \tag{2.5}$$

并且 α_k 是速降的．使用 Fourier 变换后，上式变成

$$\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi),$$

其中，$m_0(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{ik\xi}$.

引理 2　我们有 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$.

事实上，已知 $\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2=1$，它蕴含了 $\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(2\xi+2k\pi)|^2=1$. 然而 $\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$，并且 $m_0(\xi)$ 以 2π 为周期．于是，$\sum_{-\infty}^{\infty}|m_0(\xi+k\pi)|^2\cdot|\hat{\varphi}(\xi+k\pi)|^2=1$. 在这个和式中，把偶数 k 与奇数 k 分开，就得到引理 2 的结论．

由 V_{-1} 定义本身，知 $\mathscr{F}V_{(-1)}=\{m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi);\ m\in L^2(0,2\pi)\}$. 但是 $\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$. 因此，$\mathscr{F}V_{(-1)}=\{m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\}$. 用 U 表示从 $\mathscr{F}V_0$ 到 $L^2(0,2\pi)$ 的酉算子，它的定义是 $U(m(\xi)\hat{\varphi}(\xi))=m(\xi)$. 我们不想计算 $\mathscr{F}V_{-1}$ 在 $\mathscr{F}V_0$ 中的正交性，而宁愿计算 $U\mathscr{F}V_{(-1)}$ 在 $U\mathscr{F}V_0$ 中的正交性；即我们想在 $L^2(0,2\pi)$ 中找到与 $m(2\xi)m_0(\xi)$ 正交的函数．若 $l(\xi)$ 是一个这样的函数，则

$$\int_0^{2\pi}m(2\xi)m_0(\xi)\bar{l}(\xi)d\xi=0$$

对所有 2π 为周期的函数 $m(\xi)$ 成立，因而

$$m_0(\xi)\bar{l}(\xi)+m_0(\xi+\pi)\bar{l}(\xi+\pi)=0. \tag{2.6}$$

这个关系式表明，在 Hermite 空间 $\mathbb{C}^2$ 中，向量$(l(\xi),l(\xi+\pi))$ 正交于单位向量 $(m_0(\xi),m_0(\xi+\pi))$.并且因而与向量 $e^{-i\xi}(\overline{m}_0(\xi+\pi),-\overline{m}_0(\xi))$ 成正比，即 $l(\xi)=e^{-i\xi}\overline{m}_0(\xi+\pi)\lambda(\xi)$，其中 $\lambda(\xi)=(l(\xi)m_0(\xi+\pi)-l(\xi+\pi)m_0(\xi))e^{i\xi}$.因此，$\lambda(\xi)$ 是以 π 为周期的函数．此外，作用到与 $\lambda\in L^2(0,2\pi)$ 相联系的 $l\in L^2(0,2\pi)$ 的映射是保范的．故 $e^{-i\xi}\overline{m}_0(\xi+\pi)e^{2ik\xi}$ 就给出了 $\mathscr{F}V_{(-1)}$ 的一组正交基．于

是，就可以用

$$\hat{\psi}(2\xi)=e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi). \tag{2.7}$$

定义 $\psi\in W_0$. 而函数 $\psi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 就给出了 W_0 的正交基.

最后，我们指出，

$$\boxed{\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{\alpha}_k(-1)^k\varphi(x-k)} \tag{2.8}$$

从而 ψ 具有与 φ 相同的正则性与速降性.

以 Haar 系为例. 从最基本的多分辨率分析出发，即 V_0 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的这样的函数的集合，它在每一个区间 $[k,k+1)$ 上是常数. 这时，$\varphi(x)$ 是 $[0,1)$ 的特征函数. 又从 (2.5) 知 $\alpha_0=\frac{1}{2}$, $\alpha_{-1}=\frac{1}{2}$ (其它所有 $\alpha_k=0$). 因此，从 (2.8) 推出，$\psi(x)$ 支于 $[-1,0)$ 上，在 $[0,\frac{1}{2})$ 上它等于 -1, 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上它等于 1. 相应的小波集合构成了 **Haar 系**. 它的正则性是 $r=0$.

按照这种解释，我们考虑由逐段仿射的连续函数样条的多分辨率分析 ($f\in V_0$ 在每一个区间 $[k,k+1]$ 上的限制是仿射函数). 在这种情况下，有

$$\hat{\varphi}(\xi)=\left(\frac{\sin\ \xi/2}{\xi/2}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^{-1/2},$$

函数 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，在无穷远处 $\varphi(x)=O(\exp(-\beta|x|))$, 其中 $\beta=\log(2+\sqrt{3})$. 此外，在每个区间 $[k,k+1]$ 上 $(k\in\mathbb{Z})$, $\varphi(x)$ 是逐段线性的，并且

$$m_0(\xi)=\cos^2\frac{\xi}{2}\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\xi\right)^{-1/2}\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^{1/2}.$$

这给出([186] p. 16)

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{-i\xi/2}\sin^2\frac{\xi}{4}\left(\frac{\sin\frac{\xi}{4}}{\xi/4}\right)^2\left(\frac{1-\frac{2}{3}\cos^2\frac{\xi}{4}}{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\xi}{4}}\right)^{1/2}$$

$$\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^{-1/2}.$$

这里有函数 $\psi(x)$ 的图形，这个图形说明了 $\psi(x)$ 的指数下降性，该图的数值是有效的.

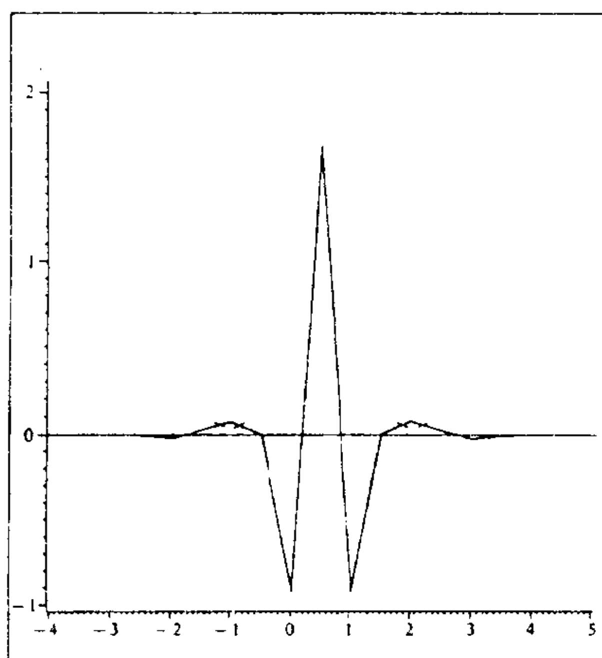


图 1

我们考虑更一般的 r 阶样条的情形. 若 r 是一个奇数，则 $\hat{\varphi}(\xi)$ 处处非负. 通过直接计算，得

$$\boxed{\hat{\psi}(\xi)=(\hat{\varphi}(\xi/2)^2-\hat{\varphi}(\xi^2)^{1/2})\ e^{-i\xi/2}}.$$

即 $\psi(x)=u(x-\frac{1}{2})$，其中 $u(x)$ 是一个实的指数型下降的偶函数.

相反地，若 r 是偶数，则

$$\hat{\varphi}(\xi)=e^{-i\xi/2}\frac{\sin\ \xi/2}{\xi/2}\ A(\xi),$$

其中 $A(\xi)\geqslant 0$. 由此得出

$$m_0(\xi)=\cos\ \xi/2\ e^{-i\xi/2}\ M(\xi),$$

其中 $M(\xi)\geqslant 0$; 因此又有

$$\hat{\psi}(\xi)=-i\frac{\sin^2\ \xi/4}{\xi/4}\ B(\xi)e^{-i\xi/2},$$

其中 $B(\xi)\geqslant 0$. 于是我们看到, $\psi(x)=v(x-\frac{1}{2})$, 其中 $v(x)$ 是奇的实函数 (如 Haar 系中那样).

考虑一维小波的第三个例子. 此例建立在 Littlewood-Paley 多分辨率分析的基础上.

这时, $\hat{\varphi}(\xi)=\theta(\xi)\geqslant 0$, 而

$$\hat{\psi}(\xi)=((\hat{\varphi}(\xi/2))^2-(\hat{\varphi}(\xi))^2)^{1/2}\ e^{-i\xi/2}\ =\theta_1(\xi)\ e^{-i\xi/2}.$$

函数 $\theta_1(\xi)$ 具有以下性质: 它属于 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, 是偶函数, 因而完全由它在 $[0,+\infty)$ 的值所确定. 事实上, 限制在正实轴, 它支在 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]$上, 这可以看成两个区间 $I=\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ 和 $J=\left[\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]$的併 $I\cup J$. 可以看出, 对所有的 ξ, $\theta_1(\xi)\geqslant 0$; 如果 $\xi\in I$, 则 $\theta_1^2(\xi)+\theta_1^2(2\xi)=1$; 最后, 如果 $\xi\in I$, 则 $\theta_1^2(\xi)+\theta_1^2(2\pi-\xi)=1$. 容易证明, 可以用 θ_1 的这些性质再造一个满足 Littlewood-Paley 多分辨率分析条件的函数 θ. 最简单就是设: 当 $\xi\in I$ 时, $\theta(\xi)=(1-\theta_1^2(\xi))^{\frac{1}{2}}$; 当 $0\leqslant\xi\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时, $\theta(\xi)=1$; 而当 $\xi>\frac{4\pi}{3}$ 时, $\theta(\xi)=0$, 并且让 $\theta(\xi)$ 是偶函数.

因此, $\psi(x)$ 是形如 $u(x-\frac{1}{2})$ 的 Schwartz 函数的 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 中的

一个函数，其中 $u(x)$ 是偶函数.

这些不同的小波是 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ ($j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$)；这些正交基具有对空间变量和 Fourier 变量同时局部化这个重要性质. 引入二进区间 $I=[k2^{-j},(k+1)2^{-j})$ ($k\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{Z}$)，就可以弄清楚 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ 关于空间变量的局部化. 为了表示该小波是"本质上支于"区间 I 上的，我们把 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ 写成 ψ_I, ψ_I 的 Fourier 变换是

$$\hat{\psi}_I(\xi)=2^{-j/2}e^{-i2^{-j}k\xi}\hat{\psi}(2^{-j}\xi). \tag{2.9}$$

这个 Fourier 变换支于 $\frac{2\pi}{3}2^j\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8\pi}{3}2^j$. 因此就可以讨论 ψ_I 的平均频率，这个平均频率大致就是 $C2^j$，其中 $C>0$ 是一个常数. 实际上，ψ_I 是限于两个八度长的一段频率上.

现在考虑用小波级数来分解

$$f=\sum_{I\in\mathscr{I}}\alpha(I)\psi_I,$$

其中 $\alpha(I)=(f,\psi_I)$，$\mathscr{I}$ 是所有二进区间构成的集合. 因此,

$$\begin{aligned}\alpha(I)&=\int f(x)\overline{\psi}_I(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}}_I(\xi)d\xi\\&=2^{-j/2}(2\pi)^{-1}\int\hat{f}(\xi)\exp(ik2^{-j}\xi)\overline{\hat{\psi}}(2^{-j}\xi)d\xi\\&=2^{-j/2}(2\pi)^{-1}\int\hat{f}(\xi)\exp\left(i\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\xi\right)\theta_1(2^{-j}\xi)d\xi.\end{aligned}$$

用 J. Morlet 的方法，我们引入滤波算子 $\Delta_j: L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$，它定义为

$$\mathscr{F}(\Delta_jf)(\xi)=\hat{f}(\xi)\theta_1(2^{-j}\xi).$$

算子 Δ_j 是自共轭的，此外还有 $I=\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_j^2$.

小波系数 $\alpha(I)$ 最终由下式给出：

$$\alpha(I)=2^{-j/2}(\Delta_j f)\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right). \tag{2.10}$$

Littlewood－Paley 分析在于把 f 写成 $f=\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_j^2(f)$，而用小波分析 f 在于按照第一章的 Shannon 法则选取二进块 $\Delta_j(f)$（不是 $\Delta_j^2(f)$）. 取样的点是 $\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}$ $(k\in\mathbb{Z})$，而取样的步长恰恰符合 Shannon 法则所规定的大小的阶. 实际上，我们还对 $f_j=\Delta_j(f)$ 进行子取样. 下面讲述理由. f_j 的 Fourier 变换的支集包含在区间 $\left[\frac{2\pi}{3}2^j, \frac{8\pi}{3}2^j\right]$ 及该区间关于原点的对称区间的併里，当限制 f_j 到等差级数 $\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 时，我们仅仅在逼近方式上是按照 Shannon 法则作的. 事实上，$\hat{f}_j$ 支集的两个区间彼此关于 $2\pi 2^j$ 同余. 确切地说，我们有

$$\left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right]+4\pi=\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

和

$$\left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right]+2\pi=\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right].$$

因此由取样 $f_j\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)$ 得到的信息不足以重建 f_j. 事实上，这涉及到一件更微妙的事，由于区间 $\left[\frac{2\pi}{3}2^j, \frac{8\pi}{3}2^j\right]$ 是彼此重叠的. 就导致了从 f_{j-1} 与 f_{j+1} 的取样直接得出 f_j 的信息. 故在小波级数与 Shannon 法则之间不存在逻辑上的联系，而仅仅是一

个启发的关系.

图 2 是构造的函数 ψ 的图形.

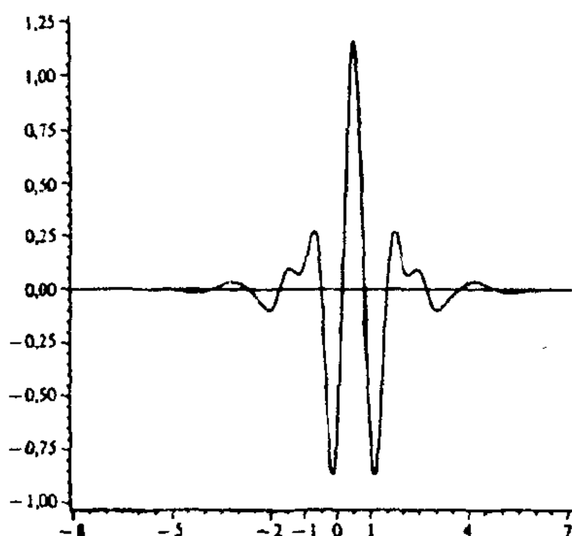


图 2

在结束一维情形的讨论之前，还有最后一点应着重指出.

根据本节引言，函数 $f \in V_j$ 在点 $\lambda \in \Gamma_j = 2^{-j}$ 处"自然地被取样". 函数 $f \in W_j$ (V_j 在 V_{j+1} 中的正交补) 在点 $\lambda \in \Lambda_j = \Gamma_{j+1} \backslash \Gamma_j$ 处也"自然地被取样". 这些点恰恰就是 $\lambda = 2^{-j}(k + \frac{1}{2})$. 若人们相信这种启发，则小波就集中在点 $\lambda = 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \in \Lambda_j$ 附近，而这正好就是在我们已经计算了小波 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ 的三种情形中已证明过的东西. 在奇阶样条或 Littlewood－Paley 分析的情形，小波 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ 就集中在 $\lambda = 2^{-j}(k + \frac{1}{2})$ 处，并且它的图形关于由这 λ 决定的垂线对称，而且小波就在这 λ 处达到最大值.

对偶阶样条，小波 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ 还是集中在 λ 处，但这时该

图形以 $(\lambda, 0)$ 为对称中心，因而对称性是不同的．

我们以计算几个特殊函数的小波系数结束本节．

从函数 $f(x)=\ln|x|$ 开始．它属于 John 和 Nirenberg 和 BMO 空间，关于这点，我们将在第Ⅴ章中再讨论．

我们来计算 $\ln|x|$ 在 Littlewood－Paley 小波基下的小波系数．最好的计算方法是使用 Fourier 变换．已知，在分布意义上，$\ln|x|$ 的 Fourier 变换是 $-\pi \mathrm{P.V.}\ \frac{1}{|\xi|}$．对 $f(x)=\ln|x|$ 计算 $\Delta_j f$，再回到公式 (2.10)．$\Delta_j f$ 的 Fourier 变换是 $-\pi\theta_1(2^{-j}\xi)/|\xi|=-\pi 2^{-j}\theta_2\cdot(2^{-j}\xi)$，其中 $\theta_2(u)=\theta_1(u)/|u|$，它具有 θ_1 的一切本质性质，即 θ_2 是一个无穷次可微的、偶的、非负的函数；它的支集包含在区间 $\left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right]$ 与 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$ 的併中．

记 $\omega\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 是 θ_2 的逆 Fourier 变换．因此，$\Delta_j f(x)=-\pi\omega(2^j x)$．故 $\ln|x|$ 的小波系数是 $-\pi 2^{-\frac{j}{2}}\omega(k+\frac{1}{2})$．重要的事实是变量 k 与 j 是分离的．

我们写 $\ln|x|$ 的小波级数如下：

$$\log|x|=-\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)\psi(2^j x-k). \tag{2.11}$$

容易计算，$\sigma(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\psi(x-k)\omega(k+\frac{1}{2})$ 的 Fourier 变换．不难验证 $\sigma(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，并且 σ 的 Fourier 变换与 ψ 的 Fourier 变换有相同的支集．因此有 $\ln|x|=-\pi\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\sigma(2^j x)$．总之，这是 $\ln|x|$ 的一个平常的分解．

但这个等式的性质可不太平常．它不是一个数值等式，因为若用 $2x$ 代替 x，等式右边不变，而 $\ln|2x|=\ln|x|+\ln 2$．于是得到 $\ln 2=0$．这是荒谬的．

当$f \in L^1(\mathbb{R})$时，由于$\|f(2^jx)\|_1 = 2^{-j}\|f\|_1$，$\sum_0^{\infty} f(2^jx)$就定义了一个$L^1(\mathbb{R})$的函数．但是级数$\sum_{-\infty}^{-1} f(2^jx)$有问题．当$f$是$\gamma>0$的 Hölder 函数时，即存在一个常数$c>0$，使得对任意$x \in \mathbb{R}$，及对任意$x' \in \mathbb{R}$，$|f(x')-f(x)| \leqslant c|x'-x|^{\gamma}$成立；则我们可以对$f$加上（或减去）任一个常数，这个问题就不存在了．例如，尽管级数$\sum_{-\infty}^{-1} f(2^jx)$对任意$x$都发散，但级数$\sum_{-\infty}^{-1}(f(2^jx)-f(2^jx_0))$在$\mathbb{R}$的任一紧支集上却是一致收敛的．

因此，等式$\ln|x| = -\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\sigma(2^jx)$表示，对某一个使它正则化的常数$a$，有

$$\log|x| = a - \pi\sum_{-\infty}^{\infty}(\sigma(2^jx) - \sigma(2^j)).$$

在研究 BMO 函数的小波级数时，这种“附加的重正则化”会更系统地出现．

现在我们来考虑函数$\mathrm{sign}x = x/|x|$．它的小波系数是不难计算的．设

$$\varepsilon(k) = \int_{-k}^{\infty}\psi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{-k}\psi(x)\,dx,$$

则$\alpha(I) = 2^{-\frac{j}{2}}\varepsilon(k)$，而序列$\varepsilon(k)$在无穷远速降．因此，从小波系数大小的阶来看，$\mathrm{sign}x$与$\ln|x|$没有多大差别．

下面就来揭示这个秘密．

我们用H表示 Hilbert 变换，即以分布 P. V. $\frac{1}{\pi x}$作卷积的算子，用$\mathscr{F}$表示 Fourier 变换．这样，$\mathscr{F}(Hf)(\xi) = -i\,\mathrm{sign}\,\xi\hat{f}(\xi)$.

因此 H 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的保范变换. 此外, H 与平移与展缩可交换. 设 $\mathscr{S}_0(\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 的一个子空间, 它由 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 中各阶矩都为零的函数组成, 则 $\mathscr{F}: \mathscr{S}_0(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_0(\mathbb{R})$ 是拓扑同构. 用这种考虑或直接计算, 我们验证了函数 $\widetilde{\psi}_I = H(\psi_I)$ 同样组成小波 (来源于另一种多分辨率分析).

我们有 $H(\operatorname{sign}x) = 2\ln|x|$, 它的意义将在第Ⅶ章中说明. 如果用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 记试验函数与分布的共轭性, 那么 $\langle 2\ln|x|, \widetilde{\psi}_I\rangle = \langle H(\operatorname{sign}x), \psi_I\rangle = -\langle \operatorname{sign}x, \widetilde{\psi}_I\rangle$. 因此, 函数 $2\ln|x|$ (在小波基 ψ_I 中) 的小波系数与 $\operatorname{sign}x$ (这次是在 $\widetilde{\psi}_I$ 中) 的小波系数是相同的. 这就说明了, 我们不能在这两个函数的小波系数之间找到任何质的差别.

最后, 计算函数 $|x|^{-\alpha}$ 的小波系数, 其中 $0<\alpha<1$. 我们总是使用 Littlewood－Paley 小波基.

这次我们不必过渡到 Fourier 变换了. 这些系数由

$$\alpha(I) = 2^{j/2}\int |x|^{-\alpha}\psi(2^j x - k)\, dx$$

给出. 作变量替换 $2^j x = u$, 得到 $\alpha(I) = 2^{j\alpha}2^{-j/2}\omega_\alpha(k)$, 其中, 序列 $\omega_\alpha(k)$ 在无穷远速降.

因此, 它的小波级数是

$$|x|^{-\alpha} = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\omega_\alpha(k)\, 2^{j\alpha}\psi(2^j x - k) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha}\psi_\alpha(2^j x).$$

$|x|^{-\alpha}$ 的展开是平凡的, 并且有 $\psi_\alpha \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R})$. 对所有的 $T>0$, 该级数在 $L^1[-T, T]$ 中收敛.

现在我们可以看到, 小波级数与 Fourier 级数或 Fourier 积分的重大差别在于函数奇异性对系数的作用上. 当把 $|x|^{-\alpha}$ 分解成小波级数时, 对固定的 $\varepsilon>0$, 相对于不与 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 相交的区间 I 的小波系数 $\alpha(I)$, 当 $|I|\to 0$ 时, 对任意 $N\geqslant 1$, 以 $O(|I|^N)$ 下降. 这就解释了, 对任意 $N\geqslant 1$, 当 $j\to\infty$ 时, 凡满足 $|k2^{-j}|\geqslant\varepsilon$ 的 k 有 $2^{j\alpha}2^{-j/2}\omega_\alpha(k) = O(2^{-Nj})$.

这些区间离奇点远，奇性与小波系数也就足够小，使得定义在它上面的函数是一个无穷次可微的函数.

因此，用小波级数进行分析可以使奇性局部化，这只要注意小波系数在什么地方反常地大. Fourier 变换则完全没有这种性质.

当研究周期小波时，我们将再讨论这个问题. 那时我们将比较小波级数与 Fourier 级数，比现在更精确地讨论我们刚刚叙述过的内容.

3. 用张量积方法构造二维小波

我们有两种办法.

可以从对应于多分辨率分析的一维小波用张积的方法得到某些小波基.

但是我们同样可以从任一个二维的多分辨率分析出发，使用在一维情形使用过的类似的方法.

在这两种办法中，二维小波将由下式给出

$$2^j\psi(2^jx-k,\ 2^jy-l),\ (j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z},\ l\in\mathbb{Z}). \qquad (3.1)$$

但是，ψ 不再是唯一的一个函数，ψ 属于由三个基本小波组成的有限集合 F.

理由如下. 当 $(k,\ l)$ 走遍 $\mathbb{Z}^2$ 时，二维小波 $2^j\psi(2^jx-k,\ 2^jy-l)$ 应当成为 W_j 的正交基. 换句话说，当 $(k,\ l)$ 走遍 $\mathbb{Z}^2$ 时，由

$$2^j\varphi(2^jx-k,\ 2^jy-l),\ 2^j\psi(2^jx-k,\ 2^jy-l) \qquad (3.2)$$

构成的集合应是 V_{j+1} 的基的集合. 按照一种几何的想法. 函数 $2^j\varphi(2^jx-k,\ 2^jy-l)$ 对应于点 $\gamma=(2^{-j}k,\ 2^{-j}l)\in\Gamma_j=2^{-j}\mathbb{Z}^2$. 空间 V_{j+1} 以对应于点 $\gamma=(2^{-j-1}k,\ 2^{-j-1}l)\in\Gamma_{j+1}$ 的函数 $2^{j+1}\varphi(2^{j+1}x-k,2^{j+1}y-l)$ 作为正交基. 以此模式，小波 $2^j\psi(2^jx-k,\ 2^jy-l)$ 应与点 $\lambda\in\Gamma_{j+1}\backslash\Gamma_j=\Lambda_j$ 有关. 这些点满足 $\lambda=2^{-j}(k+\frac{\alpha_1}{2},\ l+\frac{\alpha_2}{2})\ (k\in\mathbb{Z},\ l\in\mathbb{Z},$

$\alpha_1=0$ 或 1, $\alpha_2=0$ 或 1, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)\neq(0, 0)$. 这表明对 α 来说，有三种可能，即有三种基本小波.

在作了这个启发性的介绍之后，我们可以作得更精确并算出二维小波基.

设 $\mathscr{V}_j$ ($j \in \mathbb{Z}$) 是 L^2 ($\mathbb{R}$) 的 r 正则多分辨率分析. 用第二节的方法，我们把它同函数 φ 与 ψ 联系起来.

因此，我们定义 $V_j \in L^2$ ($\mathbb{R}^2$) 为代数张量积 $\mathscr{V}_j \otimes \mathscr{V}_j$ 在 L^2 ($\mathbb{R}^2$) 模下的闭包. 故 V_0 的正交基由乘积 $\varphi(x-k)$ $\varphi(y-l)$ ($k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$) 组成. 换言之，如果记 $\varphi(x, y)=\varphi(x)\varphi(y)$，则 V_0 的正交基是函数 φ 在 $\mathbb{Z}^2$ 作用下的轨道.

记 $\mathscr{W}_0\subset\mathscr{V}_1$ 是 $\mathscr{V}_0$ 在 $\mathscr{V}_1$ 中的正交补，显然

$$V_1=V_0 \oplus (\overline{\mathscr{V}_0 \otimes \mathscr{W}_0}) \oplus (\overline{\mathscr{W}_0 \otimes \mathscr{V}_0}) \oplus (\overline{\mathscr{W}_0 \otimes \mathscr{W}_0}). \quad (3.3)$$

事实上，$V_1=\overline{(\mathscr{V}_0 \oplus \mathscr{W}_0) \otimes (\mathscr{V}_0 \oplus \mathscr{W}_0)}$，只需展开这个张量积. 它具有乘法的代数性质，即对加法满足分配律.

我们用 W_0 表示 V_0 在 V_1 中的正交补，则 $W_0=W_{0,1} \oplus W_{1,0} \oplus W_{1,1}$，其中

$$W_{0,1}=\overline{\mathscr{V}_0 \otimes \mathscr{W}_0}, \quad W_{1,0}=\overline{\mathscr{W}_0 \otimes \mathscr{V}_0}, \text{ 而 } W_{1,1}=\overline{\mathscr{W}_0 \otimes \mathscr{W}_0}.$$

最后，合并 $W_{0,1}$, $W_{1,0}$, $W_{1,1}$ 的正交基 $\varphi(x-k)\psi(y-l)$, $\psi(x-k)\varphi(y-l)$, $\psi(x-k)\psi(y-l)$，就得到 W_0 的正交基.

下面想给这个步骤以另一种解释. 对一个 L^2 ($\mathbb{R}^2$) 的多分辨率分析 V_j ($j \in \mathbb{Z}$)，我们把 W_j 称为**变更空间**，它可以给出从 2^{-j} 为尺度的逼近到以 2^{-j-1} 为尺度的逼近的补充信息. (3.3) 表明：对两个变量做这个改进时，可以改变 y 而不改变 x，或改变 x 而不改变 y，或同时改变 x 也改变 y.

下面是应用二维小波这种结构的一个例子. 这是一个具有简单几何意义的嵌入空间 $V_j \subset L^2$ ($\mathbb{R}^2$) 的情形. 按惯例，只需定义 V_0. 当 $r=0$ 时，非常简单，$f \in V_0$ 在每个正方形 $k\leqslant x<k+1$、$l\leqslant y<l+1$ 上是常数. 结果正交基是二维 Haar 系. 当 $r\geqslant1$ 时，V_0 中的函数 $f(x, y)$ 满足以下整体正则性条件：

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f(x, y)$ 应属于 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$，并且也属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$；同时在每一个正方形上，$f(x, y)$ 与每个变量的阶数都不超过 r 的多项式 $P_{k,l}(x, y)$ 重合．然后用通常的方法定义 V_j.

在此例中，$V_0=\mathscr{V}_0\hat{\otimes}\mathscr{V}_0$，其中 $\mathscr{V}_0\subset L^2(\mathbb{R})$ 是从 r 阶样条多分辨率分析出发得到的空间．符号 $\hat{\otimes}$ 表示用 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 模使代数张量积完备化.

这样，就可以构造二维小波了．从 r 阶样条的小波基出发，这个函数 $\psi(x)$ 以 $x=\frac{1}{2}$ 为中心，则函数 $\psi(x+\frac{1}{2})$ 就以 $x=0$ 为中心．当 r 是奇数时，$\psi(x+\frac{1}{2})$ 是偶函数.

记 $\mathscr{V}_0$ 中满足以下性质的函数为 φ:$\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是 $\mathscr{V}_0$ 中的正交基，并且这些函数是用第 II 章的典型方法构造出来的．这时，二维小波是 $2^j\varphi(2^jx-k)\psi(2^jy-l)$，$2^j\psi(2^jx-k)\varphi(2^jx-l)$，和 $2^j\psi(2^jx-k)\psi(2^jy-l)$ $((k, l)\in\mathbb{Z}^2)$.

当 r 是偶数时，这三个小波的对称中心位于 $\lambda=2^{-j}(k+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2})$，并不如本章引言所预见的那样在点 $2^{-j}(k+\frac{\varepsilon_1}{2}, l+\frac{\varepsilon_2}{2})$ 处，其中 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\in\{0, 1\}^2$ 且 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\neq(0, 0)$. 当 r 是奇数时，三个小波的对称中心显然是引言中我们作过启发性解释的三个点.

4. 多维小波的构造方法

我们要讨论的是这样的问题．设 $V_j\subset L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个 r 正则多分辨率分析．记 $W_0\subset W_1$ 是 V_0 在 V_1 中的正交补．我们要找到 W_0 中的函数 ψ_ε $(\varepsilon\in E)$，使得 $\psi_\varepsilon(x-k)$ $(\varepsilon\in E, k\in\mathbb{Z}^n)$ 构成 W_0

的正交基，ψ_ε 还要有如下性质：对任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 且 $|\alpha|\leqslant r$，对 $\varepsilon \in E$，以及任意 $m \in \mathbb{N}$，有

$$|\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x)| \leqslant C_m(1+|x|)^{-m}. \tag{4.1}$$

我们将讨论这个问题的一个抽象模式．下面先叙述 K. Gröchenig 的算法，该算法可以解决抽象的问题，然后再回到小波的显式构造．

从函数 $2^{\frac{n}{2}}\varphi(2x) \in V_1$ 出发，它在离散交换群 $\Gamma_1=\frac{1}{2}\mathbb{Z}^n$ 作用下的轨道是 V_1 的正交基．在抽象的意义下，我们仅对离散交换群 Γ_1 的酉作用 U_γ: $l^2(\Gamma_1) \to l^2(\Gamma_1)$ 感兴趣，它以平移的方式作用在经典的 Hilbert 空间 $H=l^2(\Gamma_1)$ 上．

下面，我们把包含关系 $V_0 \subset V_1$ 解释为 $\mathbb{Z}^n$ 在 V_0 上的作用．函数 φ 变成了 $H=l^2(\Gamma_1)$ 的一个向量 v_0，它在子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$(在具体情形中 $\Gamma_0=\mathbb{Z}^n$) 作用下的轨道是正交序列 $U_\gamma(v_0)$ $(\gamma \in \Gamma_0)$．子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$ 的指数是有限的，在抽象形式上记它为 q(在具体情形中 $q=2^n$)．

最后，要解决的问题变成了“不完备基”理论的一种叙述形式．

我们要构造 H 的 $q-1$ 个向量 $v_1, \cdots, v_{q-1}$，使得 $U_\gamma(v_j)$ $(0\leqslant j< q, \gamma \in \Gamma_0)$ 是 H 的一组正交基．即，我们想用 $q-1$ 条相似的轨道来补充 v_0 在 Γ_0 作用下的轨道，使得这 q 个轨道构成 H 的一组正交基，而第一个轨道仅是一个正交序列．

为此，把 Γ_0 对 H 的作用分解成不可约分量．把 Γ_1 的元模去掉 Γ_0 的各个余数记为 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{q-1}$ 而让 $\gamma_0=0$．这样，类 $\Gamma_0+\gamma_j$ $(0\leqslant j<q)$ 构成了 Γ_1 的分解．用这个分解把 H 分解成 $H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_{q-1}$，其中 H_j 的元是 $l^2(\Gamma_1)$ 中的取在 $\Gamma_0+\gamma_j$ 上的序列．

最后一个化简是把 H_j 看成与 H_0 一样，同时把 Γ_0 在 H_j 上的酉作用与 Γ_0 在 $l^2(\Gamma_0)$ 上的平移看成一样．H 的元就变成具有 q 个分量的列向量，从而该问题有了以下新的提法．

考虑一个离散交换群 Γ 和一个整数 $q\geqslant 2$. 用 H 表示乘积空间 $(l^2(\Gamma))^q$, 把用平移定义的 H 的酉变换 Γ 记为 $U_\gamma: H\to H$.

从一个向量 $a_1\in H$ 出发，即从一个列向量 $[a_{1,1}(\gamma),\cdots,a_{1,q}(\gamma)]$ 出发，设 a_1(在 Γ 作用下)的轨道是一正交序列. 我们要找出 H 的 $q-1$ 个向量 $a_2,\cdots,a_q$, 使得向量的序列 $U_j(a_j)$ $(1\leqslant j\leqslant q,\gamma\in\Gamma)$ 是 H 的正交基.

我们用 G 表示 Γ 的共轭群，即取值在模为 1 的复数的乘法群上的同态 $\chi:\Gamma\to\mathbb{T}$ 构成的紧交换群. 一个这样的同态记为 $\gamma(x)$ $(\gamma\in\Gamma,\ x\in G)$.

用这些向量 $a_1,\cdots,a_q$ 的分量 $a_{j,k}(\gamma)$ 来构造函数

$$A_{j,k}(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_{j,k}(\gamma)\gamma(x).$$

使用这些记号，我们有

命题 1 向量序列 $U_\gamma(a_J)$ $(1\leqslant j\leqslant q,\ \gamma\in\Gamma)$ 是 H 的一组正交基，当且仅当对任意 $x\in G$, 矩阵 $((A_{j,k}(x))_{(1\leqslant j,k\leqslant q)}$ 是酉矩阵.

事实上，我们证明了更精确的结果：为了使这些向量构成 H 的正交基，只需向量 $U_\gamma(a_j)$ $(\gamma\in\Gamma,\ 1\leqslant j\leqslant q)$ 构成一个正交序列.

用正交条件来写，就是，除了 $j_1=j_2,\ \gamma_1=\gamma_2$ 以外，有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}a_{j_1}(y-\gamma_1)\cdot\overline{a}_{j_2}(y-\gamma_2)=0;\tag{4.2}$$

而在 $j_1=j_2$, $\gamma_1=\gamma_2$ 时，上式应等于 1.

对 $z\in\mathbb{C}^q$, $\omega\in\mathbb{C}^q$, 记 $z\cdot\omega=z_1\omega_1+\cdots+z_q\omega_q$: 设 $A_j(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_j(\gamma)\gamma(x)$, 则 $A_{j_1}(x)\overline{A_{j_2}}(x)$ 的 Fourier 级数是 $\sum_{\gamma\in\Gamma}b_{(j_1,j_2)}(\gamma)\gamma(x)$, 其中 $b_{(j_1,j_2)}(\gamma)=\sum_{y\in\Gamma}a_{j_1}(\gamma+y).\ \overline{a}_{j_2}(y)$.

这样，(4.2) 式就是对所有 $x \in G$，矩阵 $((A_{j,k}))_{1\leq j,k\leq q}$ 的列向量的正交性.

计算本身也说明每个列向量长度为 1. 这是因为 $U_\gamma(a_j)(\gamma\in\Gamma)$ 是一个正交列.

现在我们来证命题的逆方面. 已知向量 $U_j(a_j)(1\leq j\leq q,\gamma\in\Gamma)$ 构成一个正交列. 设这个序列不是完备的，用 $b \in H$ 表示正交于 $U_j(a_j)$ 的一个向量. 因此，$\sum_{j\in\Gamma} a_j(\gamma-\gamma_0)\overline{b}(\gamma)=0$(对任意 $\gamma_0 \in \Gamma$). 用相应的 Fourier 级数来写，则 $B(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma} b(\gamma)\gamma(x)$ 对任意的 $x \in G$ 都正交于矩阵 $((A_{j,k}))_{1\leq j,k\leq q}$ 的每个列向量. 但这些向量构成了 $\mathbb{C}^q$ 的一组正交基，因此 $B(x)=0$ 几乎处处成立. 于是所有的 $b(\gamma)$ 都是零.

这里存在已知酉矩阵的第一个列向量来构造 $q-1$ 个列向量的问题. 我们知道，除了 $q=2$, $q=4$, $q=8$ 之外，这个问题碰到了拓扑的障碍.

按照 K. Gröchenig 的方法，我们看到：当 $q=2^n$ 时，群 G 是 n 维环面，因而可以避开这个障碍. 从系数 $A_{j,k}(x)$ 的正则性得到，当 x 取遍 G 时，第一个向量的象集是 $\mathbb{R}^q$ 中单位球面的具有零测度的紧集. 我们将看到，这可以使我们构造出命题 1 中的酉矩阵.

下面我们首先用小波的语言来说明命题 1. 然后给出几个不必使用 Gröchenig 算法的例子. 最后，我们将描绘这个算法.

从第 II 章中所构造的函数 $\varphi \in V_0$ 出发. 定义 $m_0(\xi)$ 是满足 $\varphi(2\xi)=m_0(\xi)\varphi(\xi)$ 的以 2π 为周期的函数. 这个等式等价于

$$2^{-n}\varphi(x/2)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_k\varphi(x+k),$$

因此

$$\alpha_k=2^{-n}\int\varphi(x/2)\overline{\varphi}(x+k)\,dx,$$

并且由此得出对任意 m, $\alpha_k=O(|k|^{-m})$，从而函数 $m_0(\xi)$ 是无穷次可微的.

使用 $m_0(\xi)$，做出命题 1 中的矩阵，这时要利用 $m_0(\xi)$ 的 Fourier 级数 $\sum\alpha_k e^{ik\xi}$. 为分解这个 Fourier 级数，我们用 $2\mathbb{Z}^n+\varepsilon$ ($\varepsilon\in\{0,1\}^n=R$) 来分解 $\mathbb{Z}^n$. 这样,

$$m_0(\xi)=\sum_{\eta\in R}e^{i\eta\cdot\xi}m_{(0,\eta)}(2\xi),$$

其中函数 $m_{(0,\eta)}(\xi)$ 本身也是无穷次可微的，并且以 2π 为周期.

小波 ψ_ε ($\varepsilon\in\{0,1\}^n$, $\varepsilon\neq(0,0,\cdots,0)$) 是由 $\hat{\psi}_\varepsilon(2\xi)=m_\varepsilon(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ 来定义的. $m_\varepsilon(\xi)$ 是无穷次可微且以 $2\pi\mathbb{Z}^n$ 为周期的函数，ψ_ε 至少在无穷远处速降. 因此，分解函数 $m_\varepsilon(\xi)$ 成为 $\sum_{\eta\in R}e^{i\eta\cdot\xi}m_{(\varepsilon,\eta)}(2\xi)$.

我们要再次提到命题 1 . 记 $E=R\setminus\{0,\cdots,0\}$,

推论 1 函数 $\varphi(x-k)$ 与 $\psi_\varepsilon(x-k)$ ($\varepsilon\in E$, $k\in\mathbb{Z}^n$) 是 V_1 的正交基，当且仅当矩阵

$$U(\xi)=2^{n/2}((m_{(\varepsilon,\eta)}(\xi)))_{(\varepsilon,\eta)\in R\times R} \tag{4.3}$$

是酉矩阵.

使用由 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 定义的群上的调和分析，推论 1 可以写成稍微不同的形式.

首先看到

$$m_{(\varepsilon,\eta)}(\xi)=2^{-n}\sum_{r\in R}e^{-i\pi r\cdot\eta}m_\varepsilon(\xi+r\pi). \tag{4.4}$$

因此，可以把 (4.4) 的右边看成是一个 Fourier 级数；即冻结变量 ξ，把序列 $m_\varepsilon(\xi+r\pi)$ 看成是变量 η 的函数 $m_{(\varepsilon,\eta)}(\xi)$ 的 Fourier 系数序列. 此外，还应注意到矩阵 $2^{-n/2}((e^{-i\pi r\cdot\eta}))_{(r,\eta)\in R\times R}$ 是酉矩阵.

两个酉矩阵之积仍是酉矩阵（或对群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 就用 Plancherel

定理). 因此有

推论 2 函数 $\varphi(x-k)$ 与 $\psi_\varepsilon(x-k)$ ($\varepsilon \in E$, $k \in \mathbb{Z}^n$) 构成 V_1 的正交基，当且仅当矩阵

$$\widetilde{U}(\xi)=(m_\varepsilon(\xi+\eta\pi))_{(\varepsilon,\ \eta)\in R\times R} \tag{4.5}$$

是酉矩阵.

在一维时，我们做的是令 $m_1(\xi)=e^{-i\xi}\overline{m_0}\ (\xi+\pi)$. 在二维时，若函数 $m_0(\xi)=m_0(\xi_1,\ \xi_2)$ 是实的. $\widetilde{U}(\xi)$ 的另外三个列向量的一种可能的选择是

$$m_1(\xi)=e^{-i\xi_2}m_0(\xi_1+\pi,\ \xi_2)\ ,$$

$$m_2(\xi)=e^{-i(\xi_1+\xi_2)}m_0(\xi_1,\ \xi_2+\pi)\ ,$$

以及

$$m_3(\xi)=e^{-i\xi_1}m_0(\xi_1+\pi,\ \xi_2+\pi).$$

5. 二维小波的计算

我们打算使用上节的推论 2 找到两个二维小波基，它们是不能归结为一维小波基的张量积的.

在所讨论的两种情形里，从多分辨率分析出发，得到一个实函数 $m_0(\xi)=m_0(\xi_1,\ \xi_2)$. 这样，就可以使用推论 2 后面的注来构造小波.

第一个例子是用正六边形铺平面，再把它们分成等边三角形. 以平移作用到 V_0 上的群不再是 $\mathbb{Z}^2$, 而是由向量 $e_0=(1,\ 0)$ 和 $e_1=\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 生成的网 Γ.

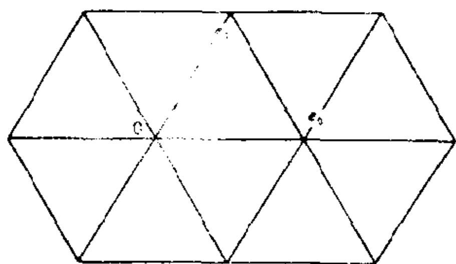


图 3

这个网画出了用等边三角形铺平面时的边线．我们用 V_0 表示 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的这样的函数构成的闭子空间，它们在整个平面上连续，并且在每个等边三角形上的限制是一个仿射函数．我们用 $f(x, y) \in V_0$ 当且仅当 $f(2^j x, 2^j y) \in V_j$ 这个条件定义 V_j．容易验证，V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个多分辨率分析，它与网 $\Gamma_j = 2^{-j}\Gamma$ 的嵌入有关．

记 Γ 的共轭网为 $\Gamma^\star$，它是 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 的加群，使得对任意 $(\xi, \eta) \in \Gamma$，$u\xi + v\eta \in 2\pi\mathbb{Z}$．

我们用 $g(x, y)$ 表示空间 V_0 的“基本样条”；$g(0, 0) = 1$ 并且当 $(\xi, \eta) \in \Gamma$ 又 $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ 时，$g(\xi, \eta) = 0$．这时 g 的图形是六边形，它的 Fourier 变换是

$$\hat{g}(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin \xi/2}{\xi/2} \frac{\sin\left(\frac{\xi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\eta\right)}{\frac{\xi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\eta} \times \frac{\sin\left(\frac{\xi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\eta\right)}{\frac{\xi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\eta}.$$

因此，我们可以计算函数 $\varphi \in V_0$，其中 φ 定义为一个实的、偶的、并且积分值是 1 的函数；当 $(\xi, \eta) \in \Gamma$ 时，$\varphi(x-\xi, y-\eta)$ 应是 V_0 的一组正交基．

我们有

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta)=\hat{g}(\xi, \eta)/\omega(\xi, \eta),$$

其中

$$\omega(\xi, \eta)=\left(\sum_{(u, v)\in\Gamma^{*}}|\hat{g}(\xi+u, \eta+v)|^{2}\right)^{1/2}.$$

故我们可以使用（第 4 节的）命题 1 的推论 2 来完成小波的计算，所得到的小波在无穷远处以指数阶下降.

在这**第一个例子**中，小波基 ψ_1, ψ_2, ψ_3 的奇性出现在由直线构成的网上（它们是以 $\frac{1}{2}\Gamma$ 为顶点的三角形的边）. 在从单变量的 r 阶样条出发用张量积方法构造二维小波时，情形也是一样的.

我们要介绍的**第二个例子**在几何上是不同的，它属于 P.G. Lamarié. V_0 中函数的奇性集中在网 $\mathbb{Z}^2$ 的顶点处. 此外，此例与 Laplace 算子有关. 确切地说，我们定义 V_0 是由具有以下性质的函数 f 构成的 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的闭子空间，它是 Sobolev 空间 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 中的函数，使得在分布意义上，$\Delta^2 f$ 是在点 $(k, l)\in\mathbb{Z}^2$ 具有 Dirac 质量的和.

因此，Δ^2 的亚椭圆性保证了，在 $\mathbb{Z}^2$ 外 f 是无穷次可微的（也是实解析的）.

我们使用变分方法定义 V_0，这个方法在证明由 $T_0(f)(k, l)=f(k, l)$ 定义的取样算子 $T_0: V_0\to l^2(\mathbb{Z}^2)$ 是 V_0 与 $l^2(\mathbb{Z}^2)$ 的同构时，也是有用的.

注意到，如果 Sobolev 空间 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 是由连续函数（或同样地，由 r 阶 $(0<r<1)$ Hölder 函数）组成，那么即使把 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 的函数限制到一个点上也是有确定意义的.

现在叙述变分问题.

从属于 $l^2(\mathbb{Z}^2)$ 的序列 $\alpha(k, l)$ 出发，我们想在 $f\in H^2(\mathbb{R}^2)$ 并且满足 $f(k, l)=\alpha(k, l)$ 的集合上对泛函 $\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta f|^2 dx\ (dx=dx_1 dx_2)$ 求极

小值．这个集合 V 是 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个闭仿射簇．

这个变分问题的困难在于：已知 $J(f)=\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta f|^2\,dx$ 时，要找的极小泛函在 Hilbert 空间 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 上不是强制性的．即设 C 是一个有限常数，条件 $J(f)\leqslant C$ 并不定义 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个有界部分；事实上，它缺乏对 $\|f\|_2^2$ 的控制．但如果用

$$K(f)=\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta f|^2\,dx+\sum_k\sum_l|f(k,l)|^2$$

代替 $J(f)$，我们就能绕过这个困难．

因为显然，对由 $f(k,l)=\alpha(k,l)$ 定义的仿射簇 V 来说，$J(f)$ 与 $K(f)$ 同时达到极小，而在 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 上，泛函 $K(f)$ 是强制性的，这就是下面的引理．

引理 3 在 Sobolev 空间 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 上，$(K(f))^{\frac{1}{2}}$ 与 $(\|\Delta f\|_2^2+\|f\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ 是等价模.

我们先证明 $(K(f))^{\frac{1}{2}}\leqslant C(\|\Delta f\|_2^2+\|f\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$．为此，使用在第 I 章中已提到过的以下事实.

引理 4 设 $\chi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$，则对任意实数 s，存在常数 $C(s,\chi)$，使得对所有函数 $f\in H^s(\mathbb{R}^2)$，有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\|f(x)\chi(x-k)\|_{H^s}^2\leqslant C(s,\chi)\|f\|_{H^s}^2.$$

此外，若 $s>1$ 且 $\chi(0)=1$，则由 Sobolev 嵌入定理得

$$|f(k)|\leqslant\|f(x)\chi(x-k)\|_\infty\leqslant C_s\|f(x)\chi(x-k)\|_{H^s}.$$

于是有

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|f(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_s\ \|f\|_{H^s},$$

这就是引理 3 所要求的结论.

反之，我们要证明

$$\|f\|_2\leqslant C\left(\|\Delta f\|_2+\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|f(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),\tag{5.1}$$

为此，分解 $f\in H^2(\mathbb{R}^2)$ 为 $g+h$，其中当 $-\pi\leqslant\xi\leqslant\pi$，$-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ 时，$\hat{g}(\xi,\eta)=\hat{f}(\xi,\eta)$，否则 $\hat{g}(\xi,\eta)=0$.

由 Plancherel 公式立即有 $\|\Delta h\|_2\leqslant\|\Delta f\|_2$，由于在 $\hat{h}$ 的支集上 $\xi^2+\eta^2\geqslant\pi^2$，因此，

$$\|\Delta h\|_2^2=\frac{1}{4\pi^2}\iint(\xi^2+\eta^2)^2|\hat{h}(\xi,\eta)|^2\ d\xi\ d\eta$$

$$\geqslant\frac{\pi^2}{4}\iint|\hat{h}(\xi,\eta)|^2\ d\xi\ d\eta=\pi^4\|h\|_2^2.$$

把这些估计放到一起，便得到 $\pi^2\|h\|_2\leqslant\|\Delta h\|_2\leqslant\|\Delta f\|_2$.

现在只剩下控制 g 的 L^2 模这件事了.

应用引理 3 证明的第一部分到 h，就有

$$\left(\sum_k\sum_l|h(k,l)|^2\right)^{1/2}\leqslant C\|\Delta f\|_2\leqslant C\ (K(f))^{1/2}.\tag{5.2}$$

而由定义 $\left(\sum_k\sum_l|f(k,l)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant(K(f))^{\frac{1}{2}}$. 由此得出

$$\left(\sum_k\sum_l|g(k,l)|^2\right)^{1/2}\leqslant(C+1)\ (K(f))^{1/2}.\tag{5.3}$$

这些系数 $g(k,l)$ 是一个以 $2\pi\mathbb{Z}$ 为周期的函数的 Fourier 系数，而这个函数在 $[-\pi,\pi)^2$ 上的限制就是 $\hat{g}$. 因此 (5.3) 的左边就等于 $(2\pi)^{-1}\left(\iint|\hat{g}(\xi,\eta)|^2\ d\xi\ d\eta\right)^{\frac{1}{2}}=\|g\|_2$. 这样，引理 3 证毕.

引理 3 说明，我们的变分问题有唯一解．现在就来研究解的性质．为此，用 $N \subset H^2(\mathbb{R}^2)$ 表示在网 $\mathbb{Z}^2$ 上取零值的函数组成的子空间；对任意 $u \in N$，对任意数 λ，有 $J(f+\lambda u) \geqslant J(f)$．由此得到 $\int \Delta f \Delta u = 0$；当 Δf 和 Δu 属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 时，这个积分是绝对收敛的．为此，作分部积分，并注意到，在通常的试验函数与分布的共轭性意义上，Sobolev 空间 $H^{-2}(\mathbb{R}^2)$ 是 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 的共轭，记共轭双线性形式为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$．因此在这个意义上，对所有 $u \in N$，特别是对在 $\mathbb{Z}^2$ 上取零值的 $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$，有 $\langle \Delta^2 f, u \rangle = 0$．故 $\Delta^2 f$ 是在网 $\mathbb{Z}^2$ 的点上 Dirac 测度的和．

以上讨论说明，可以用

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f \in H^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{和} \ \Delta^2 f = \sum\sum \beta(k,l)\delta_{(k,l)} \tag{5.4}$$

定义 V_0 空间（多分辨率分析的出发点），其中，$\delta_{(k,l)}$ 是在 $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ 处的 Dirac 质量．

我们综述对变分研究得到的结果．

命题 2 对任意平方可和级数，存在唯一的函数 $f \in V_0$，使得 $f(k, l) = \alpha(k, l)$ $((k, l) \in \mathbb{Z}^2)$．这个函数使 $\iint |\Delta f|^2 \, dx$ 在集合 M 上达到极小，而 M 是由 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 中在 $\mathbb{Z}^2$ 上的限制为零的函数组成的集合．

下面用改变二进展缩尺度的方法定义 V_j $(j \in \mathbb{Z})$，我们得到 $f \in V_j$，当且仅当 $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$ 且 $\Delta^2 f$ 是在点 $2^{-j}\mathbb{Z}^2$ 处取的 Dirac 质量的和．因为这些网是嵌入的，所以对 V_j 空间来说结果是一样的．

现在证明 $\cap V_j = \{0\}$．此事等价于：即使 $\Delta^2 f = c\delta_{(0,0)}$，$f$ 也不可能属于这个交集．作 Fourier 变换，则 $\hat{f}(\xi, \eta) = c(\xi^2+\eta^2)^{-2}$，当 $c \neq 0$ 时，它不可能属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$．

另外，V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 的併集在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中稠密．这要用正交投影

算子 E_j: $L^2(\mathbb{R}^2) \to V_j$ 来计算，并要证明 E_j 在算子的强拓扑意义上趋于恒等算子.

为计算 E_j，只需确定 E_0，再改变尺度. 我们把这件事归结为构造 V_0 的典型正交基 $\varphi(x-k, y-l)$ $((k, l) \in \mathbb{Z}^2)$. 先来找 $\mathscr{F} V_0$，$\mathscr{F} V_0$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个闭子空间，它是由所有 V_0 中的函数的 Fourier 变换组成的. 若 $f \in V_0$，则 $\Delta^2 f \in H^{-2}(\mathbb{R}^2)$，且 $\Delta^2 f = \sum_k \sum_l \beta(k, l)\, \delta_{(k, l)}$. 由引理 4 得出，$\sum_k \sum_l |\beta(k, l)|^2 < \infty$. 我们将说明，这个条件对刻划 $\Delta^2 V_0$ 是不充分的. 事实上，设

$$q(\xi, \eta) = \sum\sum \beta(k, l) \exp(-ik\xi - il\eta),$$

则 $f \in V_0$，当且仅当 $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$ 并且 $\Delta^2 f = \sum_k \sum_l \beta(k, l) \delta_{(k, l)}$. 作 Fourier 变换后，这就写成了 $(1+\xi^2+\eta^2)\ \hat{f}(\xi, \eta) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 及 $(\xi^2+\eta^2)\ \hat{f}(\xi, \eta) = q(\xi, \eta)$. 这两个条件蕴含着：在一定意义下，$q(\xi, \eta)$ 在 $(0, 0)$ 处为零. 因为 $q(\xi, \eta)$ 是一个以 $2\pi\mathbb{Z}^2$ 为周期的平方可积函数，谈到 q 在一点取值没有意义，所以应该仔细解释这个条件. 为克服这个困难，我们定义

$$\omega(\xi, \eta) = \left[\sum_k \sum_l ((\xi - 2k\pi)^2 + (\eta - 2l\pi)^2)^{-2}\right]^{-1}. \tag{5.5}$$

因为 $q(\xi, \eta)$ 以 $2\pi\mathbb{Z}^2$ 为周期，所以在点 $(0, 0)$ 的邻域 $q(\xi, \eta) \cdot (\xi^2+\eta^2)^{-2}$ 仍平方可积. 函数 $q(\xi, \eta)\ ((\xi - 2k\pi)^2 + (\pi - 2l\pi)^2)^{-2}$ 在 $(2k\pi, 2l\pi)$ 的邻域，及对 $q(\xi, \eta) \sum_k \sum_l ((\xi - 2k\pi)^2 + (\eta - 2l\pi)^2)^{-2} = m(\xi, \eta)$，情况都如此.

结论是，$q(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta)\ m(\xi, \eta)$，其中 $m(\xi, \eta)$ 是 $2\pi\mathbb{Z}^2$ 为周期的并且是平方可积的.

注意到，函数 $\omega(\xi, \eta)$ 是以 $2\pi\mathbb{Z}^2$ 为周期的实解析函数，并且在 $(0, 0)$ 的邻域上 $\omega(\xi, \eta) \sim (\xi^2+\eta^2)^2$ 成立. 乘积 $(\xi^2+\eta^2)^{-2} \cdot$

ω (ξ, η) 也是一个实解析的函数．现在可以刻划 $\mathscr{F} V_0$ 了．

命题 3 一个函数属于 $\mathscr{F} V_0$，当且仅当它可以写成 $(\xi^2+\eta^2)^{-2}$ $\omega(\xi, \eta)m(\xi, \eta)$，其中 $m(\xi, \eta)$ 是以 $2\pi\mathbb{Z}^2$ 为周期的平方可积函数．

这个命题又回到要证明：当 g 由 $\hat{g}$ $(\xi, \eta)=(\xi^2+\eta^2)^{-2}\omega(\xi,\eta)$ 时，g $(x-k, y-l)$ $((k, l) \in \mathbb{Z}^2)$ 是 V_0 的一组 Riesz 基．那时，就容易用第 II 章的方法来构造正交基 $\varphi(x-k, y-l)$. 我们计算

$$\omega_2(\xi, \eta)=\left(\sum_k\sum_l|\hat{g}(\xi+2k\pi, \eta+2l\pi)|^2\right)^{1/2}$$

$$=\omega(\xi, \eta)\left(\sum_k\sum_l((\xi+2k\pi)^2+(\eta+2l\pi)^2)^{-4}\right)^{1/2}.$$

因为 $\omega(\xi, \eta)$ 在点 $(2k\pi, 2l\pi)$ 为零，这补偿了二重级数的奇性，所以不再有奇性了．事实上，存在两个常数 $C'>C>0$，使得 $C\leqslant\omega_2$ $(\xi, \eta)\leqslant C'$.

下面，用

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta)=\frac{\hat{g}(\xi, \eta)}{\omega_2(\xi, \eta)}=(\xi^2+\eta^2)^{-2}\omega(\xi, \eta)/\omega_2(\xi, \eta)$$

定义 φ.

函数 φ 是实的偶函数，它在无穷远处是指数下降的．由于 $\hat{\varphi}(0, 0)=1$；并且当 $(k, l)\neq(0, 0)$ 时，$\hat{\varphi}(2k\pi, 2l\pi)=0$，我们有 $\sum_k\sum_l\varphi(x-k, y-l)=1$. 因此用 $E((x, y),(x', y'))=\sum_k\sum_l\varphi(x-k,y-l)\cdot\varphi(x'-k', y'-l)$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 在 V_0 上正交投影算子 E_0 的核（当用算子 E_0 去作用时，是对 x', y' 去做核的积分）.

我们有

$$|E((x, y), (x', y'))|\leqslant C\exp(-\gamma(|x-x'|+|y-y'|)),$$

其中，γ 是某一常数．最后得到 $\iint E((x, y), (x', y'))\, dx'\, dy' = 1$．应用第Ⅱ章引理 13，算子 E_j 在强收敛的意义下收敛于恒等算子．由此得出，V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 的併在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中稠密．

应用（第 4 节）命题 1 的推论 2 后面的注，不难构造出小波．在我们的情形，m_0 不仅是实的而且是非负的．

6. 小波基存在性的一般定理

本节的目的在于把在第 2 节中对一维小波所做的事情推广到 $n \geq 2$ 维．

设 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个多分辨率分析．依惯例，用 W_j 表示 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补．我们有下面的存在性定理．

定理 2 存在 $q = 2^n - 1$ 个函数 $\psi_1, \cdots, \psi_q$，它们属于 V_1，并且具有以下两个性质：

对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 且 $|\alpha| \leq r$，对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$N \geq 1$，有

$$|\partial^\alpha \psi_l(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}; \tag{6.1}$$

函数 $\psi_l(x-k)$ $(1 \leq l \leq q,\ k \in \mathbb{Z}^n)$ 构成了 W_0 的一组正交基．　(6.2)

推论 1 函数 $2^{nj/2}\psi_l(2^j x - k)$ $(1 \leq l \leq q,\ k \in \mathbb{Z}^n,\ j \in \mathbb{Z})$ 构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交基．

完全仿照一维情形，从函数 φ 出发，它是 r 正则的，是（在 (6.1) 意义上）速降的，并且 $\varphi(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ 是 V_0 的一组正交基．下面将说明怎样处理 φ 以得到小波．

我们先来构造一个函数 $m_0(\xi)$．它以 $2\pi\mathbb{Z}^n$ 为周期，无穷次可微并且满足 $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$．这个等式来源于 $2^{-n}\varphi(x/2) = \sum \alpha_k \cdot$

$\varphi(x-k)$，其中 $\alpha_k=2^{-n}\int\varphi(x/2)\overline{\varphi}(x-k)\,dx$ 是一个速降的序列. 设 $m_0(\xi)=\sum\alpha_k e^{-ik\xi}$，可以给出 $m_0(\xi)$ 的性质. 我们试图找到 q 个以 $2\pi\mathbb{Z}^n$ 为周期的函数 $m_l(\xi)$ $(1\leq l\leq q)$，用关系式 $\hat{\psi}_l(2\xi)=m_l(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ 来定出小波 ψ_l. 上述等式是因为 $\psi_l\in V_1$.

代替指标 l, 我们使用序列 $\varepsilon\in E$, E 是集合 $\{0,1\}^n$ 但要除去 $(0, 0, \cdots, 0)$. 今后不再写 ψ_l, m_l 等，而写成 ψ_ε, m_ε 等.

由命题 1 的推论 1, 可以写出下式

$$m_\varepsilon(\xi)=\sum_{\eta\in\{0,1\}^n}e^{i\eta\cdot\xi}m_{\varepsilon,\eta}(2\xi). \tag{6.3}$$

我们不去找函数 m_ε $(\varepsilon\in E)$，而试着去寻找 $m_{\varepsilon,\eta}(\xi)$.

在写法上的最后一个变更是在与 $m_0(\xi)$ 有关的等式 $\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ 中，用 $m_\varepsilon(\xi)$ 代替，其中 $\varepsilon=(0, 0, \cdots, 0)$.

最后我们构造一个矩阵 $U(\xi)$，它的列向量是向量 $m_{\varepsilon,\eta}(\xi)$ $(\eta\in R=\{0,1\}^n)$. 函数 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 与 $\psi_\varepsilon(x-k)$ $(\varepsilon\in E, k\in\mathbb{Z}^n)$ 构成 V_1 的一组正交基的充分必要条件是矩阵 $2^{\frac{n}{2}}U(\xi)$ 是酉矩阵.

剩下来是要构造这个酉矩阵. 它的第一列是已知的. 对 2^n-1 个列向量的唯一限制是它们应以 $2\pi\mathbb{Z}^n$ 为周期并且关于 ξ 无穷次可微. 特别地，矩阵 $U(\xi)$ 应是 ξ 的连续函数，这使我们碰到以下众所周知的拓扑障碍，除了 2, 4, 8维，不存在单位球上（非零的）处处连续的向量场.

尽管如此，还是可能构造出我们的小波，这是因为情况有点特别.

事实上，向量 $m_{0,\eta}(\xi)$ 没有画出 $\mathbb{R}^{2^n}$ 的整个单位球（或当 $m_0(\xi)$ 取复值时，$\mathbb{C}^{2n}$ 的单位球). 这是因为 $m_0(\xi)$，进而 $m_{0,\eta}(\xi)$ $(\eta\in R)$ 是 ξ 的 $2\pi\mathbb{Z}^n$ 为周期的无穷次可微的函数.

但是，如果 F: $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ $(q>p)$ 是 Lipschitz 的，则 $F(\mathbb{R}^p)$ 的测度是零. 由此得出，在映射 $\xi\to(m_{0,\eta}(\xi))_{\eta\in R}$ 的作用下，$\mathbb{R}^n$ 的

象 K 是单位球 $S\subset\mathbb{R}^{2^n}$ (或复值时的 $\mathbb{C}^{2^n}$) 上零测度紧集. 在我们的情形，当 $n\geq 2$ 时，我们球的维数 q 是 2^n-1, 而 $p=n$, 则当然有 $q>p$.

因而，在 K 的含于 S 的邻域上，存在 S 的一个正交标架的表达式，它在 x 是实解析的. 我们就要证明这一点，从而完成定理 2 的证明.

引理 5 设 $q\geq 2$, S 是 $\mathbb{R}^{q+1}$ 中的单位球 (或 $\mathbb{C}^{q+1}$ 中的单位球). 如果 $K\subset S$ 是 S 的一个紧的真子集，则存在 K 的一个邻域 U, 对所有的 $x\in U$, 向量 $v_1(x)$, $\cdots$, $v_q(x)$ 具有以下性质:

在开集 U 上，$v_1(x)$, $\cdots$, $v_q(x)$ 是实解析函数. (6.4)

对任意 $x\in U$, $(x, v_1(x), \cdots, v_q(x))$ 是 $\mathbb{R}^{q+1}$(或 $\mathbb{C}^{q+1}$)的一组正交基. (6.5)

借助坐标旋转，不妨假设 $(0, 0, \cdots, 0, 1)\notin K$. 对复值情形进行证明. 我们从构造向量 $w_1(x)$, $\cdots$, $w_\varepsilon(x)$ 入手，它们是 x 的实解析函数，使得在 K 的邻域，$(x, w_1(x), \cdots, w_q(x))$ 是 $\mathbb{C}^{q+1}$ 的一组基. 接着再用通常的 Gram−Schmidt 方法对 $(x, w_1(x), \cdots, w_q(x))$ 正交化 (并保持第一个向量不变).

为造出向量 $w_1(x), \cdots, w_q(x)$, 先做以下观察. 行列式

$$\begin{vmatrix} z_1 & \alpha & 0 & \cdot & 0 \\ z_2 & 0 & \alpha & \cdot & 0 \\ z_3 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_q & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ z_{q+1} & -\bar{z}_1 & -\bar{z}_2 & \cdot & -\bar{z}_q \end{vmatrix}$$

的值是

$$(-1)^{q+1}\{\alpha^{q-1}(|z_1|^2+\cdots+|z_q|^2)-\alpha^q z_{q+1}\}.$$

因此，可以设向量 $z=(z_1,\cdots,z_{q+1})$ 属于 K. 若 $\alpha>0$ 足够小，则对任何 $z\in K$, 这个行列式不为零.

下面来说明原因. 行列式为零就是 $\alpha z_{q+1}=|z_1|^2+\cdots+|z_q|^2$. 由于 $|z_{q+1}|\leqslant 1$, 就有 $|z_1|^2+\cdots+|z_q|^2\leqslant\alpha$. 但 $z_{q+1}>0$, 因此，α 趋于 0 时，点 $z\in K$ (在该点行列式为零) 趋于点 $(0,0,\cdots,0,1)$，而这点恰恰不属于 K.

当 $\alpha>0$ 充分小时，行列式的列向量就给出了我们要找的向量 $w_1(z),\cdots,w_\varepsilon(z)$.

当 S 是 $\mathbb{R}^{q+1}$ 中的单位球时，可以用以下方式证明引理 5．设紧集 K 不包含向量 $(0,\cdots,0,-1)$. 记 $y=\frac{1}{2}(x+e)$, $x\in U$, $e=(0,\cdots,0,1)$，用 σ_y 表示关于 y 的对称．在这个对称下，x 与 e 交换. 最后，我们要找的正交标架就是典型标架 $(e_1,\cdots,e_q)$，$e_{q+1}=e$ 在 σ_y 下的象.

我们刚才叙述的多维小波构造属于 K. Gröchenig(〔122〕).

7. 小波的振动

这里，振动（英语中称为相消性）是用等于零的矩的个数来度量的.

回到定理 2 的叙述，用 ψ_l $(1\leqslant l\leqslant q)$ 具有性质 (6.1) 和 (6.2) 的函数. 我们有

引理 6 $|\hat{\varphi}(\xi)|^2+|\hat{\psi}_1(\xi)|^2+\cdots+|\hat{\psi}_q(\xi)|^2=|\hat{\varphi}(\xi/2)|^2$.

为证明它，用 2ξ 代替 ξ, 就化为证

$$|m_0(\xi)|^2+|m_1(\xi)|^2+\cdots+|m_q(\xi)|^2=1.$$

改写指标后，它就变成等式 $\sum_{\varepsilon\in R}|m_\varepsilon(\xi)|^2=1$. 而这只需应用（第 4

节的）命题 1 的推论 2 即可.

我们现在可以证明下面的重要结果了.

命题 4 对 $|\alpha|\leqslant r$ 及 $1\leqslant l\leqslant q$，具有定理 2 的性质 (6.1) 和 (6.2) 的小波 $\psi_1, \cdots, \psi_q$ 一定满足

$$\int x^\alpha \psi_l(x)\ dx=0. \tag{7.1}$$

整数 r 是由假设 "V_j 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的 r 正则多分辨率分析" 定义的.

为证明 (7.1)，我们使用当 ξ 趋于 0 时，$|\hat{\varphi}(\xi)|^2=1+O(|\xi|^{2r+2})$ 这一事实（第 II 章命题 7）. 把它与引理 6 一起用，就有 $\hat{\psi}_l(\xi)=O(|\xi|^{r+1})$ $(1\leqslant l\leqslant q)$. 但是 ψ_l 在无穷远是速降的，因而它的 Fourier 变换是无穷次可微的. 因此，当 $\xi=0$, $|\alpha|\leqslant r$ 时，有 $\partial^\alpha\hat{\psi}_l(\xi)=0$. 再用逆变换，就得到 (7.1).

8. 紧支集小波

我们又回到一维情形，证明以下定理.

定理 3 对任意整数 $r\geqslant 1$，存在 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析 V_j，它是 r 正则的，并且它决定的 φ 与 ψ 是紧支的.

当 $r=0$ 时，没什么可证的，因为 Haar 系就适用. 这时 φ 是区间 $[0, 1]$ 的特征函数，而 $\psi(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2})$ 上取 1，在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上取 -1，在其它处取零值.

当 r 增大时，φ 与 ψ 的支集也相应变大. I. Daubechies (〔88〕)（定理 3 是属于他的）还得到了以下精确的结果：存在

一个常数 C, 使得对任意 $r \geqslant 1$, φ 与 ψ 的支集包含于 $[-Cr, Cr]$ 中. 换言之, 函数 φ 与 ψ 的支集对于函数的正则性指标 r 线性增长是最优的: 还存在第二个常数 $c>0$, 使得 φ 与 ψ 的支集的直径比 cr 大.

另外, 我们要构造的函数 φ 与 ψ 是实值的.

在证明定理 3 之前, 对它做些评注. 依惯例, 我们用 $\mathscr{I}$ 表示所有二进区间 $I=[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ $(k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z})$ 的集合. 若 $I \in \mathscr{I}$, 我们用 ψ_I 表示函数 $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$. 设 m 是一个充分大的整数, 使得 φ 与 ψ 的支集包含在 $\left[\frac{1}{2}-\frac{m}{2}, \frac{1}{2}+\frac{m}{2}\right]$ 中. 因此, ψ_I 与 φ_I 的支集包含在 mI 中, 其中 mI 是与 I 有相同的中心, 但长度是 I 的 m 倍的区间.

对任意 $N \geqslant 1$, 可以把基本的恒等式

$$f(x)=\sum_{I \in \mathscr{I}} (f, \psi_I)\, \psi_I \tag{8.1}$$

写成更精确的形式:

$$f(x)=\sum_{|I| \leqslant 2^{-N}} (f, \psi_I)\psi_I+\sum_{|I|=2^{-N}} (f, \varphi_I)\varphi_I . \tag{8.2}$$

(8.2) 式对分析学家多年的梦想作出了回答, 这个梦想是找到一个具有所有尺度的局部的 Fourier 分析.

以这个观点来看 (8.2), 它的右边是由一个满足 $|I|=2^{-N}$ 的 "块" φ_I 构成的简单的级数, 与 $|I| \leqslant 2^{-N}$ 时 ψ_I 构成的二重级数的和组成.

可以把级数 $\sum_{|I|=2^{-N}} (f, \varphi_I)\varphi_I$ 解释成所讨论函数 f 的具有 2^{-N} 尺度的 "模糊的象". 这个象是由计算 f 在每个长为 $m2^{-N}$ 的区间 mI 上的 "软化平均" (f, φ_I) 而得到的.

我们希望重建 $f(x)$ 而使它带有它的所有细节, 这个 "过分简化的象" 还是有用的. 应该对它做长度为 $m2^{-j}$ $(j>N)$ 的越

来越细的“小修正”．这些“修正”具有完全相同的结构，并且从左向右每次移动 2^{-j}．显然，(8.2) 右边二重级数的项 $\langle f, \psi_I\rangle \psi_I$ 就体现了这些小修正．

评论结束，我们来证定理 3．我们给出的证明不同于 Daubechies 的初始证明．这里用 S. Mallat 的方法，它的出发点是一个无穷次可微的以 2π 为周期并且满足 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$ 与 $m_0(0)=1$ 的函数 $m_0(\xi)$，由此构造一个 r 正则多分辨率分析．我们先找出 φ，使得 $\varphi(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是一个正交序列，并用它构造 V_0，其中 V_0 表示这个序列张成的闭子空间．

自然，φ 与 m_0 的关系是 $\hat{\varphi}(\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$．因此应有 $\hat{\varphi}(\xi)=\prod_1^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$．由 $m_0(0)=1$ 及 m_0 的正则性便得到这个无穷乘积的收敛性．

第一个微妙的地方在于，若 $\varphi(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是正交序列，则 V_0 空间也就构造出来了，并且

$$\mathscr{F} V_0=\{m(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\ ;\ m(\xi) \in L^2\ (0,\ 2\pi)\ \}.$$

其中，$m(\xi)$ 还是周期为 2π 的函数．定义 V_{-1} 为 $f \in V_0$ 的 $f\ (x/2)$ 构成的集合，则 $\mathscr{F} V_1=\{m(2\xi)\varphi(2\xi)\ ;\ m(\xi) \in L^2\ (0,\ 2\pi)\}^2$．由此得到 $\mathscr{F} V_{-1} \subset \mathscr{F} V_0$，我们能够制造多分辨分析了．

在这个步骤中有两处值得注意：

(a) 从 $m_0(\xi)$ 出发用所指出的方法构造 φ 时，不总有 $\varphi(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 成为正交列成立．

(b) 还不清楚所造出的多分辨率分析是否 r 正则．

应该寻找加上 $m_0(\xi)$ 上的充分条件以处理好这两点．相反地，很容易选择 $m_0(\xi)$ 使 φ 具有紧支集．已知 $m_0(\xi)=\sum \alpha_k e^{ik\xi}$，其中 $\alpha_k=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)\overline{\varphi}(x+k)\ dx$．若 φ 有紧支集，则当 $|k|>T$ 时 $\alpha_k=0$，因此 $m_0(\xi)$ 是一个有限项的三角和．反之，若 $m_0(\xi)$ 是一

个有限项三角和，则由 $\hat{\varphi}(\xi)=\prod_1^\infty m_0(2^{-j}\xi)$ 定义的 φ(事先，只知是一缓分布)是一个紧支集的分布．事实上，用 σ 表示在 $-k\in\mathbb{Z}$ 处质量为 α_k 的有限和．然后把在 $k2^{-j}$ 处具有同样质量 α_k 的分布称为 σ_j，于是 $\varphi=\sigma_1*\sigma_2*\cdots*\sigma_j$，并且在分布意义上 $\sigma_1*\sigma_2*\cdots*\sigma_j$ 收敛于 φ．这是因为部分积 $m_0(\xi/2)\cdots m_0(\xi/2^j)=\pi_j(\xi)$ 满足 $|\pi_j(\xi)|\leqslant 1$，并且它在任意紧集上一致收敛到 $\hat{\varphi}$；因此它在分布意义上收敛到 $\hat{\varphi}$．若 σ_1 的支集包含在 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$中，则 $\sigma_1*\sigma_2*\cdots*\sigma_j$ 的支集就包含在 $[-T,T]$ 中．取极限后，φ 的支集就包含在区间 $[-T,T]$ 中．

只要 φ 具有紧支集并且 $m_0(\xi)$ 是一个三角多项式，用定理 1 的方法构造出的小波 ψ 也具有紧支集．事实上，$\hat{\psi}(2\xi)=e^{-i\xi}\overline{m}_0(\xi+\pi)\hat{\varphi}(\xi)$，这表明 $\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right)$是 φ 与在 $[-T+1,T+1]$ 中的点列的 Dirac 质量的有限和的卷积．由此得出，ψ 有紧支集并且其支集包含在 $[-T+\frac{1}{2},T+\frac{1}{2}]$ 中．

我们要讨论的第 1 个引理是：对用 m_0 定义的 φ，总有 $\|\varphi\|_2\leqslant 1$(实际上能证明 $\|\varphi\|_2<1$).

引理 6　设 $m_0(\xi)\in C^1$ 是周期为 2π 的函数，它满足 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$ 以及 $m_0(0)=1$．用无穷乘积定义 φ:

$$\hat{\varphi}(\xi)=m_0(\xi/2)m_0(\xi/4)\cdots,$$

则 $\|\varphi\|_2\leqslant 1$.

为此，只需证明：对任意 $N\geqslant 1$，有

$$I_N=\int_{-\pi 2^N}^{\pi 2^N}|\pi_N(\xi)|^2\ d\xi=2\pi,$$

其中

$$\pi_N(\xi)=m_0(\xi/2)\cdots m_0(\xi/2^N).$$

事实上，从 $|m_0(\xi)|\leqslant 1$ 显然有 $|\hat{\varphi}(\xi)|\leqslant|\pi_N(\xi)|$ ，并且

$$\int_{-\pi 2^N}^{\pi 2^N}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\leqslant 2\pi.$$

这显然蕴含了所要的结论.

我们来计算 I_N. 由于 $\pi_N(\xi)$ 是 ξ 的以 $2\pi 2^N$ 为周期的函数，因此，

$$I_N=\int_0^{2\pi 2^N}|\pi_N(\xi)|^2\ d\xi=\int_0^{\pi 2^N}+\int_{\pi 2^N}^{2\pi 2^N}.$$

在第二个积分中用变量替换 $\xi=\pi 2^N+u$.

注意到 $m_0(\xi)$ 的周期性质，乘积 $\pi_N(\xi)$ 中除了最后一项外其余的项都不变，因此

$$I_N=\int_0^{\pi 2^N}|\pi_{N-1}(\xi)|^2\ (|m_0(\xi 2^{-N})|^2+|m_0(\xi 2^{-N}+\pi)|^2)\ d\xi$$

$$=\int_0^{\pi 2^N}|\pi_{N-1}(\xi)|^2\ d\xi=I_{N-1}.$$

这样递推，最后有

$$I_N=\int_{-2\pi}^{2\pi}|m_0(\xi/2)|^2\ d\xi=2\int_{-\pi}^{\pi}|m_0(\xi)|^2\ d\xi=2\pi,$$

其中用到了 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$.

这里有两个例子. 如果 $m_0(\xi)=\cos\dfrac{\xi}{2}e^{i\xi/2}=\dfrac{1+e^{i\xi}}{2}$ ，那么 $\hat{\varphi}(\xi)=\dfrac{\sin\ \xi/2}{\xi/2}e^{i\xi/2}$, 而 φ 是 $[-1,0]$ 的特征函数. 此例的多分

辨率分析产生了 Haar 系作为小波正交基.

取 $m_0(\xi)=\frac{1}{2}(1+e^{3i\xi})$，还是满足引理 6 的条件. 但从 $m_0(\xi)$ 的这种选择推出，在 $[-3, 0]$ 上 $\varphi(x)=\frac{1}{3}$，在 $[-3, 0]$ 之外 $\varphi(x)=0$. 这时序列 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 不构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基.

下面的引理解释了这个反例.

引理 7 除了引理 6 的假设外，还假设 $m_0(\xi)$ 是有限的三角和 $\sum_{|k|<T}\alpha_k e^{ik\xi}$，并且在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上 $m_0(\xi)\neq 0$，则 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是正交序列.

从以上诸引理知，$\varphi\in L^2(\mathbb{R})$，$\varphi$ 有紧支集，因而 $\hat{\varphi}$ 属于所有的 Sobolev 空间. 因此函数

$$\alpha(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2$$

无穷次可微.

证明 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是正交序列现在变成证明 $\alpha=1$. 事实上，只要证 $\alpha(\xi)$ 是一个常数，这是因为 $\varphi(0)=1$(再次回到无穷乘积)，并且若 $l\in\mathbb{Z}$, $l\neq 0$ 时 $\hat{\varphi}(2l\pi)=0$. 为此，注意到，因为 $|m_0(0)|^2+|m_0(\pi)|^2=1$，所以 $m_0(\pi)=0$; 因此只要对某个 $j\geqslant 1$, $2^{-j}\xi=(2m+1)\pi$, 就有 $\hat{\varphi}(\xi)=0$. $\xi=2l\pi$ $(l\in\mathbb{Z}, l\neq 0)$ 就是这种情形.

我们将按照 Tchamitchian 博士的方法来证明 $\alpha(\xi)$ 是一个常数. 为了不使符号过繁，设 $g(\xi)=|m_0(\xi)|^2$, 这时 $|g(\xi)|+|g(\xi+\pi)|=1$, $0\leqslant g(\xi)\leqslant 1$, $|\hat{\varphi}(\xi)|^2=g\left(\frac{\xi}{2}\right)g\left(\frac{\xi}{4}\right)\cdots\cdots$. 由此式得到以下结果:

引理 8 对 $\xi\in\mathbb{R}$, 恒有

$$\alpha(2\xi)=\alpha(\xi)g(\xi)+\alpha(\xi+\pi)g(\xi+\pi). \tag{8.3}$$

这个等式说明，$\alpha(2\xi)$ 是 $\alpha(\xi)$ 和 $\alpha(\xi+\pi)$ 带有系数 $g(\xi)$，$g(\xi+\pi)$ 的重心. 这件事再加上 α 与 g 的周期性，对证明 $\alpha(\xi)$ 是一个常数就足够了.

为证明引理 8,最后一次再回到 $\alpha(\xi)$的定义. 我们有 $\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$，也有

$$\alpha(2\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(2\xi+2k\pi)|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|m_0(\xi+k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\xi+k\pi)|^2$$

$$=|m_0(\xi)|^2\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\xi+2k\pi+\pi)|^2$$

$$=\alpha(\xi)g(\xi)+\alpha(\xi+\pi)g(\xi+\pi).$$

除了 (8.3) 和条件 $0\leqslant g(\xi)\leqslant 1$, $g(\xi)+g(\xi+\pi)=1$ 以及 $g(\xi)>0$ $\left(\xi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 之外，让我们忘掉前面的一切，而来证明 $\alpha(\xi)$ 是一个常数. 为此，用 m 和 M 表示 $\alpha(\xi)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最小值和最大值. 我们要证明 $M=m=\alpha(0)$.

(至少) 在一点 $\xi_0\in[-\pi,\pi]$ 取到最小值 m, 我们使用 (8.3) 并让 $\xi_1=\xi_0/2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 由假设知 $g(\xi_1)>0$. 因此，或是 $0<g(\xi_1)<1$, 或是 $g(\xi_1)=1$. 在第一种情形，必有 $\alpha(\xi_1)=m=\alpha(\xi_1+\pi)$；而在第二种情形，有 $\alpha(\xi_1)=m$ 而预先不知 $\alpha(\xi_1+\pi)$ 的值. 重复这样做，就得到一列 $\xi_k=2^{-k}\xi_0$，$\alpha(\xi_k)=m$, 取极限便有 $\alpha(0)=m$.

同理，有 $\alpha(0)=M$. 因此 $\alpha(\xi)$ 是一个常数；如我们已指出的，这个常数是 1.

为结束我们方法的 (a) 部分的介绍，假设我们知道如何选取 $m_0(\xi)$ 以使得 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})$. 则引理 7 给出了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多分辨率分析 V_j ($j\in\mathbb{Z}$)，此外，若 φ 的直到 r 阶导数都属于 $L^\infty(\mathbb{R})$, 则这个多分辨率分析将是 r 正则的.

设 V_0 是由 $\varphi(x-k)$ ($k\in\mathbb{Z}$) 生成的 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间. 我们

用条件：$f(x)\in V_0$ 等价于 $f(2^jx)\in V_j$，来定义 V_j.

为验证这些子空间 V_j 是嵌入的，只需证明 $V_{-1}\subset V_0$. 而事实上，序列 $1/\sqrt{2}\ \varphi\left(\frac{x}{2}-k\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是 V_{-1} 的一组正交基，并且由构造方法，根据 $\hat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$，有 $\frac{1}{2}\ \varphi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum\alpha_k\cdot$ $\varphi(x+k)$.

最后，我们来证明 $\cap V_j=\{0\}$ 以及 $\cup V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密. 为此，用 E_j: $L^2(\mathbb{R})\to V_j$ 表示正交投影算子，然后要证明在算子强拓扑意义上 $\lim\limits_{j\to-\infty}E_j=0$, $\lim\limits_{j\to+\infty}E_j=1$. E_j 的核 $E_j(x,y)$ 是

$$E_j(x,y)=2^jE(2^jx,2^jy), \tag{8.4}$$

而

$$E(x,y)=\sum\varphi(x-k)\overline{\varphi}(y-k). \tag{8.5}$$

若承认 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})$，则 $|E(x,y)|\leqslant C$，并且当 $|x-y|\geqslant 2T$ 时 $E(x,y)=0$. 此外，由于 $\hat{\varphi}(0)=1$，以及当 $k\in\mathbb{Z}$ 但 $k\neq0$ 时 $\hat{\varphi}(2k\pi)=0$，我们有 $\int E(x,y)\,dy=\sum\varphi(x-k)=1$.

使用第Ⅱ章的引理 13，就有 $E_j\to I\ (j\to+\infty)$. 很清楚，我们也有 $E_j\to0\ (j\to-\infty)$.

现在转来讨论我们的方法的 (b) 部分. 我们将看到存在着真正的困难. 这里给出的构造很多应归功于与 J. P. Kahane 和 Y. Katznelson 的讨论. 我深表感谢.

第一点简化是可以忘掉 $m_0(\xi)$ 而仅仅保留 $g(\xi)$. 事实上，我们将研究 φ 的正则性，力图得到：在无穷远处有 $\hat{\varphi}(\xi)=O(|\xi|^{-s})$. 这显然等价于 $|\hat{\varphi}(\xi)|^2=O(|\xi|^{-2s})$，而定义 $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$ 的无穷乘积仅涉及 g. 此外，当 $s>r+1$ 时，由加到 $\hat{\varphi}$ 本身的条件便可得到 $\varphi\in C^r$. 以下的 F. Riesz 引理使从 g 回到 $m_0(\xi)$ 成为可能.

引理 9 设 $g(\xi)=\sum_{-T}^{T}\gamma_k e^{ik\xi}$ 是整个实直线上的非负三角多项式，则存在三角多项式 $h(\xi)=\sum_{0}^{T}\alpha_k e^{ik\xi}$，使得 $|h(\xi)|^2=g(\xi)$. 此外，如果系数 γ_k 是实的，则可以选择模为 1 的常数使得 α_k 也是实的.

我们以后用到引理 9 时，系数 γ_k 确实是实数，所以 α_k 也是实数；因此函数 φ 与 ψ 也是实值的.

例如 $g(\xi)=1+\cos\xi$ 时，$h(\xi)$ 就是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+e^{i\xi})$. 引理 9 的证明留给读者作为练习.

现在，我们来看看如何造出 $g(\xi)$. 从一个整数 k 出发（以后会看到它与 s 有关，因而就与 r 有关）；令 c_k 是一个正的常数，满足 $c_k\int_0^{\pi}(\sin t)^{2k+1}\,dt=1$，则当 $k\to+\infty$ 时，有 $c_k=O(\sqrt{k})$. 因此令 $g(\xi)=1-c_k\int_0^{\xi}(\sin t)^{2k+1}\,dt$. 我们就“毫不费力地”得到了 $0\leqslant g(\xi)\leqslant 1$ 以及 $g(\xi)+g(\xi+\pi)=1$. 还有，在区间 $(-\pi,\pi)$ 上，$g(\xi)>0$. 剩下要讨论的是无穷乘积 $G(\xi)=g\left(\frac{\xi}{2}\right)g\left(\frac{\xi}{4}\right)\cdots g\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$.

从我们给出的 $g(\xi)$ 的特例，可以得到以下性质:

对任意 $t\in\mathbb{R}$，有 $0\leqslant g(t)\leqslant 1$; $g(t)$ 在整个实直线上连续并且 $g(t+2\pi)=g(t)$; (8.6)

$$g(t)\leqslant C\sqrt{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k \quad \left(\frac{2\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{4\pi}{3},\ k\geqslant 1\right); \tag{8.7}$$

$$g(t)\leqslant|t-\pi|^{2k+2} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ k\geqslant k_0). \tag{8.8}$$

由于 g 是以 2π 为周期的函数，在证明这两个不等式时，可以仅限于考虑 $0\leqslant t\leqslant\pi$. 这时

$$g(t)=c_k\int_t^{\pi}(\sin\ u)^{2k+1}\ du\ .$$

注意到，当 $0\leqslant u\leqslant\pi$ 时，$\sin\ u\leqslant\pi-u$，这样就可控制这个积分，并且以更精确的形式得到 (8.8)；事实上，常数 $c_k=O(\sqrt{k}\ )$ 被积分时得到的系数 $\dfrac{1}{2k+2}$ 吸收了.

至于 (8.7)，当 $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant u\leqslant\pi$ 时，我们满足于用 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 去控制 $\sin\ u$.

最后还应注意到，除非 t 充分接近 π 时，(8.7) 比 (8.8) 更精确.

可以用下述引理来结束关于 φ 和 ψ 的正则性的研究. 我们将证完定理 3 后再证明它.

引理 10 设 δ 与 C 是两个常数，其中 $0<\delta<1$, $C\geqslant1$, 则存在常数 $\alpha=\alpha(\delta,\ C)>0$ 具有以下性质：对任意在整个实直线连续且具有以下 (8.9)，(8.10) 性质的、取值于〔0, 1〕的、以 1 为周期的函数 $f\ (t)$：

$$0\leqslant f\ (t)\leqslant\delta\qquad\left(\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3}\right);\tag{8.9}$$

与

$$f\ (t)\leqslant C\left|t-\frac{1}{2}\right|;\tag{8.10}$$

以及对任意整数 $j\geqslant2$，有

$$\sup_{1/4\leqslant t\leqslant1/2}\{f\ (t)\ f\ (2t)\cdots f\ (2^{j-1}t)\}\leqslant2^{-\alpha j}.\tag{8.11}$$

在已有的例子里，$f(0)=1$，因此假如对 t 没有限制的话，(8.11) 不能成立. 但是限制在 $a\leqslant t\leqslant b(0<a<b<1)$ 时，仍可以有 (8.11) 成立. 可是指数 α 依赖于 a 和 b. 我们不使用这种改进，仍然限制 (8.11) 为已给出的形式.

暂时承认引理 10，先回到小波 φ 与 ψ 正则性的讨论. 我们要证明：对任意整数 $N\geqslant 1$，可以选择 k，使得若 $g(\xi)=1-c_k\int_0^\xi(\sin t)^{2k+1}dt$，则无穷乘积 $G(\xi)=g(\xi/2)g(\xi/4)\cdots g(\xi/2^j)\cdots$ 在无穷远处是 $O(|\xi|^{-N})$. 因为 $G(\xi)=|\hat{\varphi}(\xi)|^2$，由此就得到 $\varphi\in C^{(N/2)-2}$. 而整数 N 又是任意的，定理 3 就被证明了. 为研究 $G(\xi)$ 在无穷远处的性质，我们使用二进环 $\pi 2^j\leqslant|\xi|\leqslant 2\pi 2^j$ 裁剪集合 $|\xi|\geqslant\pi$，在每个环上分别做变量替换 $|\xi|=2\pi 2^{j+1}t$. 这样，总可以归结到 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$ 的情形. 又因为 $0\leqslant g(\xi)\leqslant 1$，设 $f(t)=(g(2\pi t))^{\frac{1}{2k+2}}$，就有

$$
\begin{aligned}
G(\xi)&\leqslant g(\xi/2)\cdots g(\xi/2^{j+1})=g(2\pi t)\cdots g(2\pi 2^{j-1}t)\\
&=(f(t)f(2t)\cdots f(2^{j-1}t))^{2k+2}.
\end{aligned}
$$

先讨论函数 $f(t)$ 的性质. 当 $k\geqslant k_0$，有 $C\sqrt{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}=\delta^{2k+2}$，其中 $\delta=\frac{2}{\sqrt{5}}<1$. 又从 (8.8) 知 $g(2\pi t)\leqslant(2\pi)^{2k+2}|t-\frac{1}{2}|^{2k+2}$.

所有这些说明了，$f(t)=((g2\pi t))^{\frac{1}{2k+2}}$ 满足引理 10 的假设（$\delta=\frac{2}{\sqrt{5}},C=2\pi$). 因此只要承认引理 10 的结论，便有

$$
G(\xi)\leqslant 2^{-2\alpha(k+1)j}=0(|\xi|^{-N}),
$$

其中 $N=2\alpha\ (k+1)$.

现在我们能够证明：对于 φ 的正则性来说，函数 φ 与 ψ 的支集的直径（至多）是线性增长的. 事实上，已经知道，当

$m_0(\xi)=\sum_{-T}^{T}\alpha_k e^{ik\xi}$ 时，φ 的支集包含在 $[-T, T]$ 中．引理 9 说明，T 是三角多项式的阶，这实际上已给出了 $T=2k+1$．因此，对这种选法，我们已经得到 $\hat{\varphi}(\xi)=O(|\xi|^{-\alpha(k+1)})$，并且所有的 $\beta<\alpha-1$，$\varphi\in C^{\alpha k+\beta}$．$\varphi$ 的支集的增长完全满足我们曾宣称的条件．实际上，还能够证明（也是 I. Daubechies 告诉我的）这个线性增长是最优的．

回头来证明引理 10．一开始，我们用 $h(t)=f(t)f(2t)$ 代替 $f(t)$．如果能证明 $h(t)h(2t)\cdots h(2^{j-1}t)\leqslant 2^{-\alpha j}$，就可以得出 $f(t)f(2t)\cdots f(2^{j-1}t)\leqslant 2^{\alpha j/2}$．这种变换的好处在于：在保持性质 $0\leqslant h(t)\leqslant 1$ 及 $h(t)\leqslant C\left|t-\frac{1}{2}\right|$ 的同时，把 (8.9) 成立的范围扩大到 $\frac{1}{5}\leqslant t\leqslant\frac{5}{6}$．

当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$h(t)=0$．此时显然有 (8.11) 的控制．因此，我们可以假设 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$，于是有

$$t=0,\ 0\ 1\ \alpha_3\ \alpha_4\cdots=0+\frac{0}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\alpha_3}{8}+\frac{\alpha_4}{16}+\cdots,$$

其中 $\alpha_j=0$ 或 1．

因为 $h(t)$ 的周期为 1，所以 $h(2^q t)=h(0,\ \alpha_{q+1}\alpha_{q+2}\cdots)$．

为控制乘积 $h(t)\cdots h(2^{j-1}t)$，我们又要研究序列 $2^q t$ 的模 1 分解．这又需要分析出现在 t 的二进展开中由 0 和 1 组成的序列 α_1，α_2，…．称满足 $\alpha_{q+1}\neq\alpha_{q+2}$ 的 q 的集合为 $F\subset\{0, 1, \cdots, j-1\}$．若 $q\in F$，则 $h(2^q t)=h(0.10\alpha_{q+3}\cdots)$ 或是 $h(2^q t)=h(0.01\alpha_{q+3}\cdots)$．在第一种情形，有 $\frac{1}{2}\leqslant 0.10\alpha_{q+3}<\frac{3}{4}$；在第二种情形，有 $\frac{1}{4}\leqslant 0.01\alpha_{q+3}\cdots<\frac{1}{2}$．

在这两种情形中，$h(2^q t)\leqslant\delta$，这就是定义 F 的理由．可以用

δ^N控制无穷乘积 $h(t)\cdots h(2^jt)$ 而构成第一种控制方式，其中 N 是 F 的基数. 当 N 远比 j 小时，这种控制就不好. 这时我们用 (8.10) 提出第二种控制. 为此，只考虑由 0 和 1 组成的序列 0.01 $\alpha_3\alpha_4\cdots$，由下例，区间 I_m 仅由 1 组成，而区间 J_m 仅由 0 组成：

$$0,\ 0\ \underbrace{1\ 1}_{I_1}\ \underbrace{0\ 0}_{J_1}\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{I_2}\ \underbrace{0}_{J_2}\ \underbrace{1}_{I_3}\ \underbrace{0\ 0}_{J_3}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1}_{I_4}\ \underbrace{0\cdots}_{J_4}$$

从区间 I_m 进入区间 J_m，或从区间 J_m 进入 I_m 正好产生 $q\in F$ 的一个元．若 $q\in F$，我们用 l_q 表示由 0 或 1 组成的由 q 所"宣布的"新区间的长度（若 $q\in F$，并且 $q\in I_m$，则 l_q 就是 J_m 的长度，它可以是 $+\infty$；若 $q\in F$, $q\in J_m$，则 l_q 就是 I_{m+1} 的长度).

显然有 $\sum\limits_{q\in F} l_q \geqslant j$．设 C 是 (8.10) 中的常数，若 $l_q\geqslant A$, $2^A>C\delta^{-1}$，则我们使用 (8.10) 来控制 $h(2^qt)$，事实上，(模掉 1 后，) 2^qt 可以写成

$$0,\ 1\ \underbrace{0\ 0\ \cdots\ 0}_{l_q\text{项}}\ 1\ \cdots \quad \text{或}\ 0,\ 0\ \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{l_q\text{项}}\ 0$$

在这两种情形，2^qt(模掉 1 后)都很接近 $\dfrac{1}{2}$. 于是 $h(2^qt)\leqslant C2^{-l_q}$．(在 $1\leqslant l_q<A$ 时) 我们可以用一个一致的估计 $h(2^qt)\leqslant\delta$ 把这两种估计结合起来，因此无论在哪种情形，都有 $h(2^qt)\leqslant 2^{-\alpha l_q}$，其中 $\alpha>0$，但充分小，(条件是 $\delta\leqslant 2^{-\alpha A}$ 与 $C\leqslant 2^{A(1-\alpha)}$，因为 $\delta<1$, $C<2^A$，所以它们是相容的).

把这些不等式逐项相乘，就有

$$h(t)\cdots h(2^{j-1}t)\leqslant\prod_{q\in F} h(2^qt)\leqslant 2^{-\alpha j},$$

引理 10 证毕.

在结束本节之前，我们给出 S. Mallat 关于上述构造的观点，它同样与第 II 章的二进插值有关. 仍使用第 II 章第 13 节的符号，我们希望把包含关系 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/2$ 改写成保范单射

$$J: l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z}/2), \tag{8.12}$$

使得对任意 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$J\tau_k = \tau_k J. \tag{8.13}$$

第三个条件可以保证这个序列从离散过渡到连续. 我们希望让 $\varepsilon \to 0$, 用 $\varepsilon\mathbb{Z}$ 来逼近 $\mathbb{R}$, 同时用在 $\varepsilon\mathbb{Z}$ 上的取样 $f(\varepsilon k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 来逼近实值连续函数 $f(x)$. 我们要求 J 与这个逼近相容.

确切地说，设 $r \geqslant 1$ 是一个整数，如果对任意属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 的函数 $f(x)$，可以找到一族 f_ε $(0<\varepsilon \leqslant 1)$，它构成有界集 $B \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$，使得在 J 作用下序列 $f(\varepsilon k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的象是 $Cf(\varepsilon k) + \varepsilon^r f_\varepsilon(\varepsilon k)$，其中 C 是一个常数，则称 J 是 r 正则的. 因为 J 是部分保范的，就得到 $|C| = \frac{1}{\sqrt{2}}$，我们把它规范化使得 $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 用 $\varepsilon_k \in l^2(\mathbb{Z})$ 表示这样的序列，当 $k \neq l$ 时，$\varepsilon_k(l) = 0$，而 $\varepsilon_k(k) = 1$. 若 ε_0 在 J 作用下的象是和式 $\sum_{-\infty}^{\infty} w(j)\,\varepsilon_{(\frac{j}{2})}$, 则 ε_k 在 J 作用下的象就是 $\sum_{-\infty}^{\infty} w(j)\,\varepsilon_{(\frac{j}{2}+k)}$, 并且最终得到序列 $(x_k)_{-\infty}^{\infty} \in l^2(\mathbb{Z})$ 的象就是 $\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} w(j) x_k \varepsilon_{(\frac{j}{2}+k)}$.

为了简化这个描述，我们把序列 $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ 与函数 $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{ikx}$ 联系起来，x_k 就是函数 F 的 Fourier 系数. 同样地，把 $\left(y_{\frac{k}{2}}\right)_{-\infty}^{\infty} \in l^2(\mathbb{Z}/2)$ 与函数 $G(x) = \sum y_{\frac{k}{2}} e^{ikx/2}$ 联系起来. 若 $y_{\frac{k}{2}} = J(x_k)$，则 $G(x) = W(x/2)F(x)$，其中 $W(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} w(j) e^{ijx}$. 我们看到，$F(x)$ 是 2π

周期的并属于 L^2 〔0, 2π〕，因而 $W(x)$ 也是如此；又 $G(x)$ 是 4π 周期的，它属于 L^2 〔0, 4π〕. J 是部分保范的，这一条件等价于

$$|W(x)|^2+|W(x+\pi)|^2=2 . \tag{8.14}$$

我们仅讨论当 $|j|\to+\infty$ 时，$w(j)$ ($j\in\mathbb{Z}$) 速降的这种情形. 因此，J 是 r 正则的，当且仅当

$$|W(0)|=\sqrt{2}\ ,\ W'(0)=\cdots=W^{(r-1)}(0)=0 . \tag{8.15}$$

现在考虑所有的包含关系

$$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}/2\subset\mathbb{Z}/4\subset\cdots\subset\mathbb{Z}/2^q\subset\mathbb{Z}/2^{q+1}\subset\cdots\subset\mathbb{R},$$

我们想把它们与保范映射 J_q : $l^2\ (2^{-q}\mathbb{Z})\to\ l^2\ (2^{-q-1}\mathbb{Z})$ 联系起来，然后取极限，这时要把 $\mathbb{R}$ 看成是子群 $2^{-q}\mathbb{Z}$ 的极限.

用 J(在序列中它将被记作 J_0) 经一个简单的尺度变换，不改变序列 w (j) ($j\in\mathbb{Z}$)，这样来定义 J_q.

从 l^2 ($\mathbb{Z}$) 的典型**正交基**，即序列 ε_k ($k\in\mathbb{Z}$) 出发，依次作用 J_0, J_1, $\cdots$, J_{q-1}，得到 l^2 ($2^{-q}\mathbb{Z}$) 的**正交序列** φ_q $(x-k)$ ($x\in 2^{-q}\mathbb{Z}$). S. Mallat 的有启发性的想法是，在一个自然的意义下，当 q 趋于无穷时，这个正交序列收敛到 $\varphi(x-k)$ ($k\in\mathbb{Z}$).

因此，我们“想取极限”，并把 L^2 ($\mathbb{R}$) 看成是 Hilbert 空间 $l^2(2^{-q}\mathbb{Z})$ 的“极限”. 为使计算方便，赋予每个序列 f_q (x) ($x\in 2^{-q}\mathbb{Z}$) 一个离散测度 $\sum f\ (2^{-q}k)\ \delta_{(2^{-q}k)}=\mu_q$，并希望序列 $f_q\in l^2\ (2^{-q}\mathbb{Z})$ 的“收敛”与相应离散测度 μ_q 的弱收敛一致. 为实现这点，应该用 $2^{-q/2}$ 去乘 Hilbert 空间 l^2 ($2^{-q}\mathbb{Z}$) 的自然范数，以使这个空间正规化. 自然，测度 μ_q 的极限将通过 Fourier 变换来计算，它的定义是 $\mathscr{F}(\mu_q)\ (\xi)=\int e^{ix\xi}d\mu_q\ (x)$.

作了再正规化之后，我们有

$$\mathscr{F}(\mu_q)\ (\xi)=W(2^{-q}\xi)\ \mathscr{F}(\mu_{q-1})\ (\xi). \tag{8.16}$$

由这个等式显然得到 $\mathscr{F}\ (\mu_q)\ (\xi)=W(2^{-q}\xi)\cdots W(2^{-1}\xi).\ \mathscr{F}(\mu_0)\ (\xi)$.

对取极限所必须的再正规化就是用 $2^{-\frac{q}{2}}$ 去乘 μ_q. 为此，只

需系统地用 $(1/\sqrt{2})\ W(\xi)$ 代替 $W(\xi)$，即用我们称之为 $m_0(\xi)$ 的函数去做替代.

最后，从 0 点处的 Dirac 质量 $\sigma_0=\delta_0$ 出发，用 δ_q 表示相应的测度 $2^{-\frac{q}{2}}\mu_q$. 这样

$$\mathscr{F}\sigma_q\ (\xi)=m_0(\xi/2)\cdots m_0(\xi/2^q). \tag{8.17}$$

若 J 是 r 正则的，又若在正则性定义中的常数 $c=1/\sqrt{2}$，则 $m_0(0)=1$. 如果 $w(j)\ (j\in\mathbb{Z})$ 是速降的，则测度 σ_q 弱收敛到 $\varphi(x)\ dx$，而 $\varphi(x)\in L^2(\mathbb{R})$.

从这点出发，现在我们又必须回到 Daubechies 定理证明的巧妙部分了.

事实上，没人能证明 “极限” 序列 $\varphi(x-k)\ (k\in\mathbb{Z})$ 是正交的. 反例就是选择 $w(0)=1/\sqrt{2}$，$w\ (\xi)=1/\sqrt{2}$，其它的 $w(j)=0$.

那么，我们刚才的启发性描述仅仅可以说明引理 6 的等式 $I_N=2\pi$. 然而，它又具有无可争辩的审美特征，这就是刚才我们介绍它的原因. 它同样为公式 (2.8) 提供了一个重要的几何解释. 事实上，沿用第 II 章所有记号，用上述直观想法，V_0 就是空间 $J_{q-1}\cdots J_0\ (l^2\ (\mathbb{Z}))$ 的 “极限”，V_1 就是 $J_{q-1}\cdots J_1\ (l^2\ (\mathbb{Z}/2))$ 的极限，$\cdots$.

为构造 V_0 在 V_1 中的正交补空间 W_0，我们从 $W_0^{\#}$ 出发，$W^{\#}$ 是 $J_0\ (l^2\ (\mathbb{Z}))$ 在 $l^1\ (\mathbb{Z}/2)$ 中的正交补. 由此得出，空间 W_0 是空间 $J_{q-1}\cdots J_1\ \ (W_0^{\#})$ 的 “极限”. 为构造出 W_0 的一组形如 $\psi\ (x-k)\ (k\in\mathbb{Z})$ 的正交基，只需从 $W_0^{\#}$ 的正交基 $\psi^{\#}\ (x-k)\ (k\in\mathbb{Z})$ 出发，借助 $J_{q-1}\cdots J_1$，通过 “保范变换”，然后取极限. 为构造 $\psi^{\#}$，我们设 $\psi^{\#}\ (k/2)=(-1)^k\overline{w}(k+1)\ (k\in\mathbb{Z})$，由此得到 (2.8).

同样的观察也适用于 n 维情形. 这只要考虑包含关系 $\mathbb{Z}^n\subset 2^{-1}\ \mathbb{Z}^n\subset\cdots\subset 2^{-j}\mathbb{Z}^n\subset\cdots$，然后把这个包含关系解释成保范单射 J_q: $l^2\ (2^{-q}\mathbb{Z}^n)\to\ l^2\ (2^{-q-1}\mathbb{Z}^n)$，它们都可由尺度变换从第一个得到. 问题还是当 j 趋于无穷时，在序列 $J_{q-1}\cdots J_0\ (l^2\ (\mathbb{Z}^n))$ 中 “取极

限". 但是在此我们仅介绍这个问题的一点结果而已.

9. 多维紧支集小波

我们不知道怎样直接构造 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 r 正则多分辨率分析，使得它可以构造出具有紧支集的小波. 困难是双重的. 即使可以造出 V_j $(j\in\mathbb{Z})$ 使得 φ 具有紧支集，但用 Grochenig 的构造小波的方法却造不出具有紧支集的小波. 这与一维情形不同. 如果满足于用张量积来构造多维小波，这些困难便不复存在，同时也得到了紧支小波. 为读者方便，我们还是予以说明.

设 $\mathscr{Q}$是 $\mathbb{R}^n$ 中的二进方体

$$Q=\{x\in\mathbb{R}^n;\ 2^jx-k\in[0,\ 1]^n\}\ (k\in\mathbb{Z}^n,\ j\in\mathbb{Z})$$

的集合，用 E 表示 2^n-1 个序列 $(\varepsilon_1,\ \cdots\varepsilon_n)$ 的集合，其中 ε_i 取 0 或 1，但序列 $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\notin E$.

对任意整数 $r\in\mathbb{N}$，我们用 φ 和 ψ 表示上节从 r 正则多分辨率分析出发所造出的具有紧支集的、r 正则的函数.

对 $\varepsilon\in R$, $Q\in\mathscr{Q}$，定义

$$\psi_Q^\varepsilon(x)=2^{nj/2}\psi^{\varepsilon_1}(2^jx_1-k_1)\cdots\psi^{\varepsilon_n}(2^jx_n-k_n),$$

这里，我们约定 $\psi^0=\varphi$, $\psi^1=\psi$.

如果 $m\geqslant 1$ 有限，使用条件：φ 与 ψ 的支集包含在区间 $m[0,1]=\left[\frac{1}{2}-\frac{m}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{m}{2}\right]$内，就知 n 维小波 ψ_Q^ε 的支集就包含在 mQ 中，方体 mQ 与 Q 有相同的中心，但边长是 Q 的 m 倍.

这样造出的小波基具有适用于除 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 这个参考空间外的其它函数空间的小波基应有的四条性质. 这些性质是:

(a) 它是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一组正交基;

(b) 小波的局部性: $\operatorname{supp}\psi_Q^\varepsilon\subset mQ$;

(c) 小波的正则性: 对所有 $|\alpha|\leqslant r$ 的多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$, 有

$|\partial^\alpha \psi_Q^\varepsilon| \leqslant C 2^{j|\alpha|} 2^{nj/2}$.

(d) 小波的振动性：只要 $|\alpha| \leqslant r$，就有

$$\int x^\alpha \psi_Q^\varepsilon(x)\, dx = 0.$$

紧支小波的好处在于，可以用它来分析任意小于 r 阶的分布 $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，而不必预先对它在无穷远处的增长条件加以限制. 正像在下节我们会仔细看到的，对这样的分布，有

$$S = \sum_{Q \in \mathscr{D}_0} (S, \varphi_Q)\, \varphi_Q + \sum_{j \geqslant 0} S_j, \tag{9.1}$$

其中

$$S_j = \sum_{D \in \mathscr{D}_j} \sum_{\varepsilon \in E} (S, \psi_Q^\varepsilon)\, \psi_Q^\varepsilon.$$

我们用 $\mathscr{D}_j$ 表示边长为 2^{-j} 的二进方体的集合；若 S 是一个分布，u 是一个试验函数，则设 $(S, u) = \langle S, \bar{u} \rangle$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示分布与试验函数之间共轭的双线性形式.

等式 (9.1) 具有以下直观意义. 级数 $\sum_{D \in \mathscr{D}_0} (S, \varphi_Q)\, \varphi_Q$ 构成了分布 S 的第一个初样. 在这个初样中取了 S 的（尺度为 1 的）平均值. 这个平均值在每个点 $k \in \mathbb{Z}^n$，用积分 $\int S(x) \overline{\varphi}(x-k)\, dx$ 来计算. 这个平均就是 S 的初样 $\sum C_k \varphi(x-k)$ 中所用的系数.

然后是一些修正. 与鞅论中一样，这些修正应与已给出的平均法相容，这是由 ψ_Q $(Q \in \mathscr{D}_j, j \geqslant 0)$ 与 φ_Q $(Q \in \mathscr{D}_0)$ 的正交性来保证的.

这些修正越来越细，它的尺度越来越小. 这些修正的无穷级数就是 $S_0 + S_1 + S_2 + \cdots$；把它加到 S 的初样上就在所有细节上再现了 S.

10. 小波与函数空间

在本章中，我们已经给出了构造一族小波 ψ_λ ($\lambda \in \Lambda$) 的步骤. 这些小波构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交基. 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，它可以写成

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (f, \psi_\lambda) \psi_\lambda(x). \tag{10.1}$$

但如果仅限于 L^2 空间的平方可积函数时，Haar 系也就够了. 小波在两方面比 Haar 系优越. 对自变量来说，在函数正则的地方，小波系数是很小的. 仅在函数的奇点附近，小波系数很大. 换句话说，通常的仅有孤立奇性（或奇性出现在低维曲面上）的函数的小波级数是“成洞”的级数. 小波为零的矩的数目越大，这个性质越明显（在 Haar 系中，仅仅是积分为零）.

小波基的第二个长处在于，它灵活地适用于分析中出现的各种函数的范数. 如果 f 属于某个经典空间（Sobolev空间，Besov 空间、Hardy 空间等），那么小波级数自动地在相应的模下收敛到 f. 这是以后几章的内容，但为了不使读者感到乏味，在本节中我们用 Sobolev 空间和 Hölder 空间为例来说明这点.

但是，当在更一般情形而不仅是在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 空间使用 (10.1)，便遇到了第一个障碍. 假如 f 是恒等于 1 的函数，则每个 $\langle f, \psi_\lambda \rangle$ 都是零（因为每个小波的积分是零）. 从 (10.1) 得到 $1=0$. 因此，我们不能用 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 代替 $L^2(\mathbb{R}^n)$.

还有第二个障碍. 在某种意义上说，它是第一个障碍的对偶. 如果 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，$\int f(x)\,dx=1$，那么根据 (10.1)，这个函数便分解成每一项都是积分为零的级数，级数 (10.1) 不能依 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 模收敛，否则便允许逐项积分. 于是仿佛 (10.1) 本质上只能适用于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间，而 p 限于 $1<p<\infty$.

然而，只要把用来构造小波的 r 正则多分辨率分析中的小波再加进去，上述困难就消失了．设 $\Gamma_0=\mathbb{Z}^n$，$\Gamma_j=2^{-j}\Gamma_0\ (j\in\mathbb{N})$，$\Lambda_j=\Gamma_{j+1}-\Gamma_j$．我们把第一个参与构造小波的函数记为 φ．设 $\varphi_\lambda(x)=\varphi(x-\lambda)\ (\lambda\in\Gamma_0)$．这样，我们放弃（10.1）而用

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\Gamma_0}(f,\varphi_\lambda)\,\varphi_\lambda(x)+\sum_0^\infty\sum_{\lambda\in\Lambda_j}(f,\psi_\lambda)\,\psi_\lambda(x),\qquad(10.2)$$

它有更多的好处．

当使用这个新算法时，上述两个矛盾立即消失了．事实上，当 $f(x)$ 恒等于 1 时，每个数积 $<f,\varphi_\lambda>$ 都等于 1，从（10.2）得到等式 $1=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\varphi_\lambda(x)$．

更一般地，如果 $f(x)$ 是不超过 r 阶的多项式，则根据 $E_0(x^\alpha)=x^\alpha\ (|\alpha|\leqslant r)$，也有（10.2）成立．但是不慎重地使用（10.1），就得到荒谬的结论 $x^\alpha=0$．

因此，当 f 所在的函数空间由局部正则性（或奇异性）再加上性质上不同的"在无穷远处增长速度"这个整体性质来刻划时，我们就使用（10.2）．一个这样的例子是非齐次 Hölder 空间 $C^s=\dot{C}^s\cap L^\infty$；局部性质是：当 $0<s<1$ 时，$|f(x)-f(y)|\leqslant C|y-x|^s$ 对任意 x 与 y 成立（显然因为整体性质是 $\|f\|_\infty\leqslant C_0$，所以可以仅限于 $|y-x|\leqslant 1$）．

但是，（10.1）适用于齐次的 Hölder 空间 $\dot{C}^s$（其中不要求 $f\in L^\infty$）．这个齐次 Hölder 空间是模常数的函数空间，在这个空间中 $1=0$ 是对的．

只要使用 (10.2)，第二个矛盾也消失了．事实上，若 $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，则级数 $\sum_{\lambda\in\Gamma_0}(f,\varphi_\lambda)\,\varphi_\lambda(x)$ 依 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 模收敛到函数 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$，它的积分值等于 f 的积分值．二重级数 $\sum_0^\infty\sum_{\lambda\in\Lambda_j}(f,\psi_\lambda)\,\psi_\lambda(x)$ 依 L^1 模收敛到其积分值为零的函数 h，我们有 $f=g+h$．

下面我们来解释怎样使用 (10.1) 或 (10.2) 通过小波系数的模刻划 Hölder C^s空间和 Sobolev 空间 H^s.

为了写出这种刻划，应该从一个可以算出小波系数的数学对象f出发. 因此，当小波是由 L^2 $(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析产生时，这个数学对象就应是不超过 r 阶的分布. 这还不够，为了在使用 (10.1) 时不出现矛盾 $1=0$, 还应假设 $f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(f,\ \psi_\lambda)\ \psi_\lambda(x)$ 成立. 这个式子的意义是，该式以积分作用于任一个 C^r 的紧支集函数后所得的数值级数与左边的数相等.

做好这些事先说明，我们有以下结果.

定理 4 分布 $f\in H^s$ $(\mathbb{R}^n)$ $(-r<s<r)$，当且仅当它的小波系数 $\alpha(\lambda)=(f,\ \psi_\lambda)$ 满足

$$\sum_{j<0}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^2+\sum_{j\geq 0}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}4^{js}|\alpha(\lambda)|^2<\infty\ . \tag{10.3}$$

同样地，$f\in C^s$(非齐次 Hölder 空间) $(0<s<r)$，当且仅当小波系数 $\beta(\lambda)=(f,\ \varphi_\lambda)$ $(\lambda\in\Gamma_0)$ 和 $\alpha(\lambda)=(f,\ \psi_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda_j,\ j\geq 0)$ 满足

$$|\beta(\lambda)|\leq C_0,\ \ (\lambda\in\Gamma_0)\text{ 和 }|\alpha(\lambda)|\leq C2^{-nj/2}2^{-js}, \tag{10.4}$$

其中 C_0 与 C 是两个常数.

在证明这两个结论之前，作几个评注是有益的. 不能用小波系数的模给出 (非齐次) Hölder 空间的刻划，容易看出其理由是：不能用小波系数的模去刻划 L^∞ $(\mathbb{R}^n)$.

L^∞ $(\mathbb{R}^n)$ 不能被小波系数的模刻划这件事已经在第二节中说过了. 在 $n=1$ 时，当使用 Littlewood－Paley 小波时，$\ln|x|$ 与 $x/|x|$ 具有同样的渐近分量. 正如我们已经见到的，Hilbert 变换 H 解释了这个反常现象. H 把 $x/|x|$ 变成了 $\ln|x|$，并且把一组小波基 ψ_I 变成了一组 “不易以显式表示的” 基$\tilde{\psi}_I$, 其中要求 ψ_I 是由 Littlewood－Paley多分辨率分析推导出的.

最后一个说明是，还应注意到，Sobolev 空间 H^s 也可以用级数 (10.2) 刻划. 我们有 $f\in H^s(-r<s<r)$，当且仅当 $\sum_{\lambda\in\Gamma_0}|\beta(\lambda)|^2<\infty$ 并且 $\sum_0^\infty\sum_{\lambda\in\Lambda_j}4^{js}|\alpha(\lambda)|^2<\infty$. 事实上，因为 V_0 是 W_j $(j\leqslant-1)$ 的正交直和，所以 $\sum_{\lambda\in\Gamma_0}|\beta(\lambda)|^2=\sum_{-\infty}^{-1}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^2$.

剩下来证明定理. 至于 H^s, 这很简单. 使用第Ⅱ章定理 8, 就有，$f\in H^s$ 当且仅当 $E_0(f)\in L^2(\mathbb{R}^n)$，并且存在序列 $\varepsilon_j\in l^2(\mathbb{N})$，使得 $\|D_j(f)\|_2\leqslant\varepsilon_j 2^{-js}$. 因为小波 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda_j)$ 构成了 W_j 的一组正交基，所以 $\|D_j(f)\|_2=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|(f,\psi_\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 同理，$\|E_0(f)\|_2=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}|(f,\varphi_\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 因此 (10.3) 就与第Ⅱ章给出的刻划一致了.

对 Hölder 空间 C^s, 我们使用以下引理.

引理11 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$的子空间W_0上，$\|f\|_\infty$ 与 $\sup_{\lambda\in\Lambda_0}|(f,\psi_\lambda)|$等价.

一方面，$|(f,\psi_\lambda)|\leqslant\|\psi_\lambda\|_1\|f\|_\infty=C\|f\|_\infty$；另一方面，若 $\sup_{\lambda\in\Lambda_0}|(f,\psi_\lambda)|\leqslant1$, 则 $|f(x)|\leqslant\sum_{\lambda\in\Lambda_0}|\psi_\lambda(x)|\leqslant C'$. 这后一个不等式来自小波的局部性，从而引理就证完了.

立刻便有一个推论：在 W_j 上，模 $\|f\|_\infty$ 与 $2^{\frac{nj}{2}}\sup_{\lambda\in\Lambda_j}|(f,\psi_\lambda)|$ 等价. 这可由一个简单的尺度变换得到.

既然 C^s 是由 $E_0(f)\in L^\infty$ 及 $\|D_j(f)\|_\infty=C2^{-js}$ 所刻划，由此也立即得到了小波刻划. 一切都象我们在第Ⅱ章中已指出的一样，在 $s=m$ 时，C^s 不是通常的空间 C^m, 而是由 Zygmund 类出

发得到的空间．在 $s=1$ 时，C^s 应由具有以下性质的 f 组成的空间来代替：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是连续的，并且存在一个常数 C，使得 $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \leqslant C|y|$；此外，还要求 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$．同样地，当 $s=2$ 时，C^s 是所有其一阶导数都属于 Zygmund 类的函数组成的空间．以此类推．

现在我们中断用小波系数的大小刻划经典函数空间的讨论，因为这个课题是第Ⅴ章和第Ⅵ章的内容．

11．小波级数与 Fourier 级数

本节全部用于比较小波级数与 Fourier 级数．初看来，因为 Fourier 级数是用于表示周期函数，而小波级数用于表示（在平均上说）在无穷远处为零的函数，所以这种比较没有意义．为了公平地进行比较，一开始我们应该构造出周期小波：除了恒等于 1 的函数外，周期小波就是小波

$$2^{j/2}\psi(2^j x-k) \quad (k \in \mathbb{Z},\ j \geqslant 0)$$

（以 1 为周期）的周期化．

我们将要得到的最令人吃惊的结果是下面这个重要的事实："满的"小波级数（多数的系数非零）代表了十分异常的函数；而"通常的"函数的小波级数却是"有洞的"或"缺项的"．相反地，通常函数的 Fourier 是"满的"，而缺项的 Fourier 级数代表了病态的函数．

对这种现象有一个简单的说明：小波分析是一种局部的带有各种尺度的 Fourier 分析．它的优点是：该级数直接地集中地取值于所研究函数的奇支集上；换言之，在奇支集之外，所讨论的函数是无穷次可微的，因而相应的小波系数可以忽略．

现在我们中断这个泛泛讨论，而真去构造周期小波．

设 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 r 正则多分辨率分析．n 维情形留在以后讨论．以下都设 $r \geqslant 1$．当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时，我们用 V_j^p 表示 V_j

与 $L^p(\mathbb{R})$ 的交；而当 $2\leqslant p<\infty$ 时，V_j^p 则是 V_j 在 $L^p(\mathbb{R})$ 模下的完备化. 最后，若 $p=\infty$，依惯例，设 $L^\infty(\mathbb{R})$ 带有 $\sigma(L^\infty, L^1)$ 拓扑，则 V_j^∞ 就是 V_j 在此拓扑下的完备化. 立即可以验证；若 $\varphi(x)$ 是由多分辨率分析 V_j 定义的典范函数，则空间 V_0^∞ 可由下面的等价性描述:

$$f\in V_0^\infty \Leftrightarrow f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k\varphi(x-k) \quad \text{及} \quad c_k\in l^\infty(\mathbb{Z}), \tag{11.1}$$

或

$$f(x)\in V_0^\infty \Leftrightarrow f(2^j x)\in V_j^\infty .$$

我们用 $P_j \subset V_j^\infty$ 表示由周期为 1 的函数组成的子空间. 于是有

引理 12 当 $j\leqslant 0$ 时，P_j 都相等，并且都只由常数函数组成. 当 $j>0$ 时，P_j 的维数是 2^j.

首先注意到，因为 $\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-k)=1$，所以常数属于所有的空间 V_j^∞. 此外，根据 $V_j^\infty \subset V_{j+1}^\infty$ $(j\in\mathbb{Z})$，假如我们证明了：所有的函数 $f\in P_0$ 都是一个常数，那就完成了引理的第一个结论的证明. 为此，写出 $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(x-k)$，其中 $c(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \overline{\varphi}(x-k)\,dx$. 序列 $c(k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是一个常数列，由此 $f(x)$ 就是这个常数.

最后考虑 $j>0$ 的情形. 我们再一次写 $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(2^j x-k)$，其中 $c(k)=\int f(x)\overline{\varphi}(2^j x-k)\,dx$，这时由等式 $f(x+1)=f(x)$ 得到 $c(k+2^j)=c(k)$. 反过来的结论是直接的. 因此，向量空间 P_j 的维数是 2^j.

引理 13　P_j 的併在由定义于整个实直线上周期为 1 的连续函数组成的 Banach 空间中稠密.

正交投影算子 E_j: $L^2(\mathbb{R}) \to V_j$ 由 $E_j f(x) = \int E_j(x, y) f(y)\, dy$ 给出，其中 $E_j(x, y) = 2^j E(2^j x, 2^j y)$，而 $E(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) \cdot \overline{\varphi}(y-k)$. 已知 $|E(x, y)| \leqslant C(1+|x-y|)^{-2}$ 以及 $\int E(x, y)\, dy = 1$. 由此得出：如果 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界并且一致连续，则 $\|f - E_j(f)\|_\infty \to 0$ $(j \to \infty)$. 此外，若 f 的周期为 1，则对 $j \in \mathbb{N}$，有 $E_j(f) \in P_j$. 于是引理 13 就证完了.

我们用 $\mathbb{T}$ 表示商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，以此定义空间 $L^2(\mathbb{T})$，$C^\alpha(\mathbb{T})$ 等实直线上的函数空间，它们是由周期为 1 的、分别属于局部 L^2，$C^\alpha \cdots$ 等空间的函数组成.

定义 1　我们称用上述方法造出的整个嵌入序列 P_j $(j \in \mathbb{N})$ 为 $L^2(\mathbb{T})$ 的 r 正则多分辨率分析.

用 Γ_j 表示由 $k2^{-j}$ (模去 1) 组成的有限群. P_j 在 Γ_j 作用下是 $L^2(\mathbb{T})$ 的一个不变向量子空间.

设 $\varphi_j \in P_j$ 是由

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} \varphi(2^j(x-k)) \tag{11.2}$$

定义的函数.

引理 14　在 Γ_j 的作用下，φ_j 的轨道是 P_j 的一组正交基.

因为 P_j 的维数等于 Γ_j 的基数 (元素的个数)，所以只需验

证：函数 $\varphi_j\ (x-m2^{-j})\ (0\leqslant m<2^j)$ 构成 $L^2\ (0,\ 1)$ 的正交序列．这就导致计算

$$\sum_k\sum_l 2^j\int_0^1 \varphi(2^jx-2^jk-m)\overline{\varphi}(2^jx-2^jl-m')\ dx.$$

进行变量替换 $x-k=2^{-j}t$，其中 $0\leqslant x<1$，$k\in\mathbb{Z}$，$t\in\mathbb{R}$．就得到

$$\sum_q\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-m)\overline{\varphi}(t-2^jq-m')\ dt.$$

若 $0\leqslant m<2^j$，$0\leqslant m'<2^j$，$m\neq m'$，则每个积分都是零，对 $q\in\mathbb{Z}$ 求和还是零．若 $m=m'$，则只有 $q=0$ 这个积分不是零，它等于 1．这就证明了引理 14．

下面，用 Q_j 表示 P_j 在 P_{j+1} 中的正交补，设

$$\psi_j\ (x)=2^{j/2}\sum_{-\infty}^{\infty}\psi(2^j(x-k)).\tag{11.3}$$

引理 15 对任意 $j\in\mathbb{N}$，函数 $\psi_j\ (x-k2^{-j})\ (0\leqslant k<2^j)$ 构成了 Q_j 的正交基．

引理 15 的证明与引理 14 完全相同．首先验证，函数 $\psi_j\,(x-k2^{-j})\in Q_j$，即它们是 P_{j+1} 中的函数（这是显然的）并且它们与 P_j 正交．接着要验证，$\psi_j\ (x-k2^{-j})$ 彼此正交．最后，注意到，Q_j 的维数是 2^j（因为 P_j 的维数是 2^j，而 P_{j+1} 的维数是 2^{j+1}）；而 2^j 就是构成 Q_j 的一个正交列的向量的数目．因此，这个序列就是 Q_j 的正交基．

我们有

$$L^2\ (\mathbb{T})=P_0\oplus\ Q_0\oplus\ Q_1\oplus\ Q_2\oplus\ \cdots,$$

并由此得出，函数 1 与 $\psi_j\ (x-k2^{-j})\ (0\leqslant k<2^j,\ j\in\mathbb{Z})$ 构成了 $L^2(\mathbb{T})$ 的一组正交基．

以字典方式把这些基排序，即把 $L^2\ (\mathbb{T})$ 中的函数按

$$g_0(x)=1, \qquad g_1(x)=\psi_0(x), \qquad g_2(x)=\psi_1(x),$$

$$g_3(x)=\psi_1(x-\frac{1}{2}), \quad g_4(x)=\psi_2(x), \qquad g_5(x)=\psi_2(x-\frac{1}{4}),$$

$$g_6(x)=\psi_2(x-\frac{1}{2}), \quad g_7(x)=\psi_2(x-\frac{3}{4}), \quad g_8(x)=\psi_3(x) \tag{11.4}$$

的方式定义序列 $g_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}$).

这样造出的序列也是 $L^2(\mathbb{T})$ 的正交基. 但是它具有下述定理所讲的重要性质. 我们先讲清定理中的概念.

设 E 是一个 Banach 空间, 它的模记为 $\|\cdot\|$. 设 $e_0, e_1, \cdots, e_k, \cdots$ 是 E 中的一个序列. 若对所有的 $x \in E$, 存在唯一的系数列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots$, 使得

$$\lim_{m\uparrow\infty} \|x-(\alpha_0 e_0+\cdots+\alpha_m e_m)\|=0,$$

则这个序列就是 E 的一组 Schauder 基. 因此我们可以写成 $x=\alpha_0 e_0+\alpha_1 e_1+\cdots$; 如果这个级数是可求和的族 (即任意置换其中各项的次序后, 仍收敛于 x), 则称这组 Schauder 基是无条件的. 在本书中, 我们还要再提到它, 并将给出它的等价定义.

现在可以叙述已经提到过的重要结果了.

定理 5 设 V_j ($j \in \mathbb{Z}$) 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 的 r 正则 ($r\geqslant 1$) 的多分辨率分析. 则从 V_j 出发构造的周期小波序列 $g_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}$) 是空间 $C(\mathbb{T})$ 和 $L^1(\mathbb{T})$ 的一组 Schauder 基. 同样, 当 $0\leqslant k\leqslant r$ 时, 它是 (通常的) $C^k(\mathbb{T})$ 的 Schauder 基. 此外, 序列 $g_m(x)$ 本身还是 $0<\alpha<1$ 时的 Hölder 空间 C^α 的无条件基; 当 $r\geqslant 2$ 时是 Zygmund 类 Λ_* 的无条件基, 是 $1<p<\infty$ 时 L^p 空间的无条件基, 是 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{T})$ 和它的共轭空间 BMO $(\mathbb{T})$ 的无条件基等等.

这表明, 我们有一个 "万能的等式":

$$f=\sum_0^\infty (f, g_m) g_m . \tag{11.5}$$

首先，若 $f \in L^2(\mathbb{T})$，则部分和 $\sigma_l(f)=\sum_{0\leq m<l}(f, g_m)g_m$ 依 $L^2(\mathbb{T})$ 模收敛于 f. 但当 $f \in C(\mathbb{T})$，即 f 是周期为 1 的连续函数时，则部分和 $\sigma_l(f)$ 一致地收敛于 f. 在 Fourier 级数的情形，是没有这个性质的. 若 $f \in L^1(\mathbb{T})$，则部分和 $\sigma_l(f)$ 依 $L^1(\mathbb{T})$ 模收敛于 f. 而在 Fourier 级数的情形，还是没有这种性质.

关于 L^p 空间 $(1<p<\infty)$，特征 $\exp(2k\pi ix)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是这些空间的一组 Schauder 基，即函数 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 的 Fourier 级数的部分和 $\sum_{-l}^{l} c(k)\exp(2k\pi ix)$ 依 $L^p(\mathbb{T})$ 模收敛到 f. 对小波级数来说，因为 $L^p(\mathbb{T})$ 函数的小波级数无条件地收敛到 f, 情形会好得多.

唯一的通常的函数空间，在其中 Fourier 级数与小波级数表现俱佳，那就是 $L^2(\mathbb{T})$ 和 Sobolev 空间.

有一种情形，就是 Wiener 代数，在其中 Fourier 级数占优势，它是小波级数没有的东西. Wiener 代数 $A(\mathbb{T})$ 是 $C(\mathbb{T})$ 的一个子代数，它由 Fourier 级数是绝对收敛的函数组成. 小波基不是 Wiener 代数的一组 Schauder 基.

在证明定理 5 之前，我们考虑从 Littlewood－Paley 多分辨率分析得到的周期小波这一特殊情形. 容易证明，$g_m(x)$ 就是有限的三角和

$$\sum_{l_m\leq|l|\leq L_m} c(k, l)\exp(2\pi ilx),$$

其中 $\frac{m}{3}\leq l_m<L_m\leq\frac{4m}{3}$.

于是通常 Fourier 级数的特征 $\exp(2\pi ilx)$ $(l\in\mathbb{Z})$，在小波级数中就变成了在对数尺度下集中了几乎所有相同频率的特征而得到的“波的叠加”. 对此，我们不想给出更明确的数学解释了.

在定理 5 的结论中，某些是周期小波所特有的，它涉及到字典排列法的序在其中起了作用的一些性质，我们将证明它. 但在

小波在其中是无条件基的函数空间中，周期情形与一般情形就没有区别了．读者可参考第Ⅴ章与第Ⅵ章．

我们从研究在整个实直线上周期为 1 的连续函数的小波级数开始．证明的计划如下：为证明对任意的 $f\in C(\mathbb{T})$，当 $l\to\infty$ 时，$\|f-\sigma_l(f)\|_\infty$ 趋于零，只需对 f 属于 $C(\mathbb{T})$ 的一个稠子空间时验证这个性质，并证明存在一个常数 C，使得对任意 $l\in\mathbb{N}$，$\|\sigma_l(f)\|_\infty\leqslant C\|f\|_\infty$ 成立．

要用的稠子空间是定义 1 中空间 P_j 的併．若 $f\in P_j$，则只要 $l>2^j$，就有 $\sigma_l(f)=f$．还要验证一致控制．为此，我们认为 f 是周期为 1 的 $\mathbb{R}$ 上的连续函数；先设 $l=2^j$．这时 $\sigma_l(f)=E_j(f)$，已知算子 E_j 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上是一致有界的．这是因为，在做了尺度变换之后，E_0: $L^\infty(\mathbb{R})\to L^\infty(\mathbb{R})$ 是连续算子．连续性由 E_0 的核被 $C(1+|x-y|)^{-2}$ 控制得出．

再设 $2^j\leqslant l<2^{j+1}$，$f_l(x)=\sigma_l(f)=E_j(f)+r_l(x)$，其中 $r_l(x)=\sum_{2^j\leqslant k<l}(f,g_k)\,g_k(x)$．

既然已经控制了 $\|E_j(f)\|_\infty$，故只需考虑 $\|r_l\|_\infty$．我们有

$$\|r_l\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\left(\sup_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}\|g_k\|_1\right)\left\|\sum_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}|g_k(x)|\right\|_\infty.$$

当 $2^j\leqslant l<2^{j+1}$ 时，有 $\|g_k\|_1\leqslant C2^{-j/2}$，以及

$$\sum_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}|\psi_j(x-k2^{-j})|\leqslant 2^{j/2}\left\|\sum_{-\infty}^{\infty}|\psi(x-k)|\right\|_\infty=C2^{j/2}.$$

这一切给出 $\|r_e\|_\infty\leqslant C\|f\|_\infty$．这样就完全证明了 f_l 一致收敛于 f．

空间 $C^k(\mathbb{T})$ $(0<k<r)$ 的情形是完全类似的，我们让读者去做．这只要使用第Ⅱ章的定理 5．

当 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 时，证明 $\sigma_l(f)$ 依 L^1 模收敛到 f 只是上述结果的一个推论．事实上，重要的是要证明（关于 l 一致的）控制 $\|\sigma_l(f)\|_1\leqslant C\|f\|_1$．从 $\|\sigma_l(f)\|_\infty\leqslant C\|f\|_\infty$ 出发，使用共轭性，就立即得到这个控制．事实上

$$\|\sigma_l(f)\|_1 = \sup\{|(\sigma_l(f), g)| ; \|g\|_\infty \leqslant 1\},$$

其中，还要求 g 是周期为 1 的连续函数. 然而 $(\sigma_l(f), g) = (f, \sigma_l(g))$，然后用 $C\|f\|_1$ 控制这个数积，所要的不等式就成立了.

同样，若 μ 是 Radon 测度，则 $\sigma_l(\mu)$ 构成 $L^1(\mathbb{T})$ 函数的一个有界序列，并且这个序列依 $\sigma(M(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ 拓扑收敛于 μ. 从这点出发，可以证明某些分布 S 不是 Radon 测度，只要证明它满足 $\sup_{l\in\mathbb{N}}\|\sigma_l(f)\| = +\infty$ 即可.

在刚才叙述的结果中，项的次序起着基本的作用. 我们期待着第Ⅵ章中的讨论，从那里可知，空间 $C(\mathbb{T})$ 与 $L^1(\mathbb{T})$ 没有无条件基. 因此不能希望，打乱项的次序后，级数 (11.5) 仍然收敛.

空间 $L^p(\mathbb{T})$ $(1<p<\infty)$ 的情形则完全不同. 这里有一个比定理 5 更精确的叙述，而它的证明将在第Ⅵ章给出. 级数 $\sum_0^\infty \alpha_k g_k \in L^p(\mathbb{T})$ $(1<p<\infty)$，当且仅当 $\left(\sum_0^\infty |\alpha_k|^2 |g_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{T})$. 这个条件仅仅是对 α_k 的模 $|\alpha_k|$ 提出来的，它在下述意义上是单调的：即一旦它被一个序列 α_k 所满足，则只要对一切 k, $|\beta_k| \leqslant |\alpha_k|$，序列 β_k 也自动地满足这个条件.

对 Hölder 空间 C^α，同样有一个重要的明显的刻划. **级数 $\sum_0^\infty \alpha_k \cdot g_k(x)$ 定义了一个指数 $s>0$ 的 Hölder 函数，当且仅当 $\alpha_k = O(k^{-\frac{1}{2}-s})$.** 此外，我们必须假设 $0<s<r$；而当 $s=1$ 时，必须用 Zygmund 类代替 C^1，用 Zygmund 类中的函数的周期为 1 的原函数代替 C^2 等等. 这个 Hölder 函数的刻划可直接由第 10 节的结果得到. 在 Fourier 级数的情形，没有它的类似结果，除非是缺项级数，其局部的和整体的性质可由系数大小的阶直接测定.

我们还要更深入地比较小波级数与缺项的 Fourier 级数，但事先要说些离题的话.

F. Riesz 一般化了 Weierstrass 的构造连续但无处可导函数的方法. 他证明了：若 $\lambda>0$, $q>1$, $\lambda_{k+1}\geqslant q^{\lambda}k$ $(k\in\mathbb{N})$，则所有满足 $\sum_0^\infty|\alpha_k|<\infty$，但 $\alpha_k\lambda_k$ 不趋于零的级数 $\sum_0^\infty\alpha_k\cos\lambda_k x$，均定义了在整个实轴上连续但无处可导的函数.

为此，F. Riesz 考虑一个函数 $\psi\in L^1(\mathbb{R})$，它的 Fourier 变换，比如说，是 C^4 中的，在 1 处等于 1，在 $\left[\frac{1}{q}, q\right]$ 之外等于零. 显然，$\psi(x)$ 是连续的，在无穷远处是 $O(|x|^{-4})$.

假设和函数 $f(x)=\sum_0^\infty\alpha_k\cos\lambda_k x$ 在 x_0 可导，这时，F. Riesz 就用两种不同的方法计算了积分 $I_k=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\psi\,(\lambda_k(x-x_0))\,dx$. 同时，用 $f(x)-f(x_0)-f'(x-x_0)=O\,(x-x_0)$ 去代替 $f(x)$，I_k 并不改变. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，那么在这种情形就有 $I_k=O(\lambda_k^{-2})$. 然而由直接计算得出 $I_k=\frac{1}{2}\alpha_k\lambda_k^{-1}e^{i\lambda x_0}$. 在 x_0 处可导导致了乘积 $\alpha_k\lambda_k\to 0$.

小波技术在这个证明中已经以萌芽状态存在. 函数 $\lambda_k^{\frac{1}{2}}\psi(\lambda_k(x-x_0))$ 很像我们的小波；至少它有类似的正则性、局部性及相消性这些性质.

F. Riesz 的这个著名的证明显然不适用于一般的非缺项的 Fourier 级数. 因此它让位于小波级数. 我们就来证明它.

我们总是限于在周期小波级数 $\sum_0^\infty\alpha_m\,g_m\,(x)$ 的范围内讨论. 设 $m=2^j+k$ $(j\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k<2^j)$ (若 $m\neq 0$). 用 I_m 表示区间 $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$，而 qI_m 是与 I_m 有相同中心，但长度为 $q2^{-j}$ 的区间.

我们有

命题 5 假设级数 $\sum_{0}^{\infty}\alpha_m \ g_m(x)$ 的和函数 $f(x)$ 在整个实直线上连续并且在 x_0 处可导，则对任意 $q\geqslant 1$ 固定，只要整数序列 m 趋于无穷，并且区间 qI_m 包含着 x_0，便有 $\alpha_m=O\left(m^{-\frac{3}{2}}\right)$.

由 $\alpha_m=\int_0^1 f(x)\overline{g}_m(x)\,dx$，就立即证明了它，因为我们可以逐字逐句地重复 F. Riesz 的推理.

推论 1 设 $\alpha(m)$ 是实的或复的序列，满足 $C_1m^{-\frac{3}{2}}\leqslant|\alpha_m|\leqslant C_2m^{-\frac{3}{2}}$ $(C_2\geqslant C_1>0, m\geqslant 1$ 任意$)$，则小波级数 $\sum_{0}^{\infty}\alpha_m \ g_m(x)$ 的和属于 Zygmund 类 Λ_*（特别地，属于所有 $0<\alpha<1$ 的 Hölder 空间 C^α），但无处可导.

我们将验证历史上的 Weierstrass 级数（或有关的级数）是作为推论 1 的一般结论的特殊情形而出现的.

为此，考虑由 Littlewood－Paley 多分辨率分析得到的特殊小波，在第 2 节里已讲过它.

由直接计算知 $\sum_{-\infty}^{\infty}\psi(x-k)=-\sqrt{2}\cos 2\pi x$.

现在考虑周期小波级数 $f(x)=\sum\sum_{0\leqslant k<2^j}\alpha(j,k)\psi_j(x-k2^{-j})$. 假设 $\alpha(j,k)=\alpha(j)$ 与 k 无关，则 $f(x)=-\sqrt{2}\sum_{0}^{\infty}2^{j/2}\alpha(j)\cos 2\pi 2^j x$，这样我们又回到了缺项的 Fourier 级数.

表现很特殊的缺项 Fourier 级数，在小波理论中就是小波系数的模规则地趋于零的那类小波级数.

下面考虑 TaKagi的分形函数（〔226〕），我们回忆它的定义. 出发点是 $\mathbb{R}$ 上一个周期为 1 的连续函数 $\Delta(x)$，它的定义是：当 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ 时，$\Delta(x)=2x$；当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\Delta(x)=2-2x$. 这样，TaKagi 函数就是

$$T(x)=\sum_{1}^{\infty}2^{-j}\Delta(2^{j-1}x).$$

它具有十分重要的结构. 事实上，考虑 $\mathbb{R}^2$ 上分别由 $A(x,y)=\left(\frac{x}{2},\ \frac{x+y}{2}\right)$ 和 $B(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{y-x}{2}+\frac{1}{2}\right)$ 定义的两个仿射变换. 从点 (0, 0) 出发，让"单项式" $A^{m_1}B^{n_1}\cdots A^{m_q}B^{n_q}$ 作用到该点，其中 $m_j\in\mathbb{N}$, $n_j\in\mathbb{N}$, $1\leqslant j\leqslant q$. 则所得集合的闭包是 $T(x)$ 在〔0, 1〕上的图形 $T(x)$.

下面从图 1 所示的分段线性小波 $\psi(x)$ 出发，得到 $\sum_{-\infty}^{\infty}\psi(x-k)=\sqrt{3}\,(1-2T(x))$，这样 Tak agi 函数就写成

$$T(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{1}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}2^{-j}\psi(2^{j}x-k).$$

Takagi 函数无处可导，从命题 5 就可看到这点，事实上，$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\psi(x)\,dx=0$. Takagi 函数属于 $\alpha<1$ 时的 Hölder 函数空间 C^{α}，但它不属于 Zygmund 类. 注意到 $T(\pm 2^{-j})\geqslant j2^{-j}$. 这就不能有 $|T(2^{-j})+T(-2^{-j})-2T(0)|\leqslant C2^{-j}$，也就说明了它不属于 Zygmund 类. 可见当 $\alpha=r$ 时（r 是多分辨率分析的正则性指标），定理 5就不精确了.

由命题 5 的推论 1 还直接有以下结果.

推论 2　在 Zygmund 类中存在着由无处可微函数构成的稠

密开集.

事实上，用 Ω_ε $(\varepsilon>0)$ 表示由满足 $|\alpha_m|\geqslant\varepsilon m^{-\frac{3}{2}}(\forall m\geqslant 1)$ 及 $\alpha_m=O(m^{-\frac{3}{2}})$ 的函数 $f(x)=\sum\alpha_m g_m(x)$ 组成的集合. 推论 1 说明，$f(x)\in\Lambda_*$，并且它无处可微. 集合 Ω_ε $(\varepsilon>0)$ 的併 Ω 是 Λ_* 的一个开集. 事实上，若 $f\in\Omega_\varepsilon$, $\|f-g\|\leqslant\delta$(这里用 Λ_* 的模)则 $|\alpha_m-\beta_m|\leqslant C\delta m^{-\frac{3}{2}}$ (β_m 是 g 的小波系数). 让 $\delta>0$ 充分小，使得 $C\delta<\varepsilon/2$，就有 $g\in\Omega_{\varepsilon/2}$.

最后，这个开集在 Λ_* 中稠密. 事实上，若 $h(x)=\sum\gamma_m\ g_m\ (x)\in\Lambda_*$，则对任意 $m\geqslant 1$ 和某个常数 C，有 $|\gamma_m|\leqslant Cm^{-\frac{3}{2}}$. 对任意 $\varepsilon>0$，我们对系数 γ_m 作如下变换：当 $|\gamma_m|\geqslant\varepsilon m^{-\frac{3}{2}}$ 时，让 γ_m 不变；当 $|\gamma_m|<\varepsilon m^{-\frac{3}{2}}$ 时，用 $\varepsilon m^{-\frac{3}{2}}$ 代替 γ_m. 这样便得到 $\tilde{\gamma}_m$. 定义级数 $\tilde{h}(x)=\sum\tilde{\gamma}_m\ g_m(x)$，就有 $\tilde{h}\in\Omega_\varepsilon$, $\|\tilde{h}-h\|<C\varepsilon$，从而 Ω_ε 的并在 Λ_* 中稠密.

我们继续用一个特殊情形为例，来进行小波级数与 Fourier 级数的比较.

对 $0<\alpha<1$，考虑函数 $|\sin\ \pi x|^{-\alpha}$，它的周期是 1. 它的 Fourier 系数 $c(k)$ 有渐近展开 $c(k)=\gamma(\alpha)|k|^{-1+\alpha}+O(k^{-3+\alpha})$ (读者可以在〔239〕第Ⅴ章中找到它). 常数 $\gamma(\alpha)$ 不为零，因而函数 $|\sin\ \pi x|^{-\alpha}$ 在 0 点的奇性影响它的所有的 Fourier 系数. 但是除了那些使表征小波局部化的区间 I_m 太接近奇点的小波系数外，这个函数的其它小波系数似乎是不受 $|\sin\ \pi x|^{-\alpha}$ 的奇性的任何影响. 换言之，若 $2^j\leqslant m<2^{j+1}$, $l=\inf\ (-2^j+m,\ 2^{j+1}-m)$，则对所有整数

$N\geqslant 1$，有 $|a(m)|\leqslant C_N 2^{j(\alpha-\frac{1}{2})}(1+l)^{-N}$，这里周期小波 $g_m(x)$ 是从 Littlewood－Paley 多分辨率分析得来的．例如当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，图 4 给出了小波系数模的大小的阶．

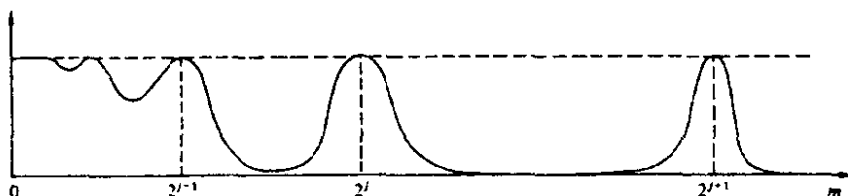


图 4

可见，函数 $|\sin \pi x|^{-\alpha}$ 的小波级数是一个"成洞"的级数．

我们还要走得更远些．考虑"缺项的"小波级数 $\sum\limits_0^\infty a(j) g_{2^j}(x)$，其中 $g_m(x)$ 是周期小波．设 $a(j)=O(2^{j(\alpha-\frac{1}{2})})$，则这个缺项小波级数的和 $f(x)$ 是周期为 1 的函数，除了在点 0，± 1，± 2，$\cdots$ 外，是无穷次可微的．它的奇性与 $|\sin \pi x|^{-\alpha}$ 是相同类型的．换句话说，我们有

$$f(x)=O(|\sin \pi x|^{-\alpha}),\quad f'(x)=O(|\sin \pi x|^{-\alpha-1}),\quad \cdots.$$

反之，"满的"小波级数与缺项 Fourier 级数有关．让我们系统地考虑系数的模 $|\alpha_m|$ 下降的周期小波级数 $f(x)=\sum\limits_0^\infty \alpha_m g_m(x)$．这时，我们有以下重要的定理．

定理 6　设 $|\alpha_m|$ 是下降的．若 $\sum\limits_0^\infty |\alpha_m|^2=\infty$，则 $\sum\limits_0^\infty \alpha_m g_m(x)$ 永远不是有界 Radon 测度的小波级数．这些级数定义了所有的真正

的分布．反之，若 $\sum_{0}^{\infty}|\alpha_m|^2<\infty$，则小波级数属于所有的 $L^p(\mathbb{T})$，甚至属于 BMO($\mathbb{T}$)．

在第Ⅴ章我们将讨论 John－Nirenberg 的 BMO 空间．我们指出：若 $p \geqslant q$，则 $L^q(\mathbb{T}) \supset L^p(\mathbb{T})$，并且 BMO($\mathbb{T}$) 包含在所有的 $L^p(\mathbb{T})$ 中．

在下面两种情形里，我们见到了定理 6 所述的二歧性．

设 $f(x)=\sum_{0}^{\infty}(a_k \cos \lambda_k x+b_k \sin \lambda_k x)$ 是一个 Hadamard 意义下的缺项 Fourier 级数（即 $\lambda_0>0$，对某个 $q>1$，$\lambda_{k+1} \geqslant q\lambda_k$）．若 $\sum(|a_k|^2+|b_k|^2)<\infty$，则 $f(x)$ 属于 L^p，甚至属于BMO．若 $\sum(|a_k|^2+|b_k|^2)=\infty$ 则 $f(x)$ 一定是一个真正的分布（$f(x)$ 不是一个 Radon 测度）．

在随机 Fourier 级数中（[149]），我们有 0－1 法则．它完全类似地几乎达到了“端点”空间，即 BMO 空间，但没有达到．然而，若 ± 是独立的等分布的 Bernoulli 变量，当 $\sum(|a_k|^2+|b_k|^2)=\infty$ 时，变号级数 $f(\omega, x)=\sum_{0}^{\infty}(\pm a_k \cos kx \pm b_k \sin kx)$．几乎一定地定义了一个真正的分布（它不是一个 Radon 测度）；反之，当 $\sum(|a_k|^2+|b_k|^2)$ 收敛时，$f(\omega, x)$ 属于所有的 L^p 空间．

先设 $\sum|\alpha_m|^2<\infty$，来证 $f(x) \in$ BMO．这里我们将随意使用第Ⅴ章定理 4 给出的 BMO 刻划（建议读者参阅该处）．

为此，设 $m=2^j+k$ $(0 \leqslant k<2^j)$，我们又回到了二进写法．这时，$g_m(x)=\psi_j(x-2^{-j}k)$．又设 $\alpha_m=c(j, k)$，$I(j, k)=[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$．这样，“Carleson 条件”是：存在常数 C，使得对任意二进区间 $I \subset [0, 1)$，有

$$\sum_{I(j, k) \subset I}|c(j, k)|^2 \leqslant C|I|. \tag{11.6}$$

为了验证满足这个条件，我们看到，从 $|\alpha_m|$ 的下降性质可以

得到 $|c(j,k)|\leqslant|c(j,0)|=\omega_j$ ($0\leqslant k<2^j$). 此外，可以把 $\sum|\alpha_m|^2<\infty$ 写成 $\sum 2^j\omega_j^2<\infty$.

在 (11.6) 中先让 $j(2^{-j}\leqslant|I|)$ 固定，求和；其中 k 出现的次数恰恰是 $2^j|I|$. 因此要计算的部分和就被 $2^j\omega_j^2|I|$ 所控制，再对 j 求和，就得到了 (11.6).

现在设 $\sum_0^\infty|\alpha_m|^2=\infty$. 考虑部分和 $f_m(x)=\alpha_0+\cdots+\alpha_m g_m(x)$. 为了证明 f 不是一个有界的 Radon 测度，只需使用定理 5, 证明 $\|f_m\|_1$ 趋于无穷. 实际上可以做得更好，我们将证明存在常数 $c>0$, 使得

$$c\left(\sum_0^\infty|\alpha_q|^2\right)^{1/2}\leqslant\|f_m\|_1. \tag{11.7}$$

我们用定理 6 第一部分的证明方法来证明 (11.7). 事实上

$$\|f_m\|_4\leqslant C\|f_m\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C'\left(\sum_0^m|\alpha_q|^2\right)^{\frac12}.$$

但由 Hölder 不等式

$$\|f_m\|_1\geqslant\|f_m\|_2^3\|f_m\|_4^{-2}\geqslant C\left(\sum_0^\infty|\alpha_q|^2\right)^{\frac12}.$$

这就证完了.

正如在本节开始所述，构造周期小波的方法很容易推广到 n 维情形. 为了不使读者被令人畏惧的繁杂记号弄糊塗，我们仅限于讨论 2 维情形. 使用 (11.2) 和 (11.3) 所定义的实单变量函数 φ_j 与 ψ_j, 用它们以如下方式定义二维小波函数 $g_k(x,y)$ $(k\in\mathbb{N})$, 它们对 x, 对 y 的周期都是 1: $g_0(x,y)=1$, $g_1(x,y)=\psi_0(x)\varphi_0(x)$, (事实上 $\varphi_0(y)=1$)

$g_2(x,y)=\varphi_0(x)\psi_0(y)$, $g_3(x,y)=\psi_0(x)\psi_0(y)$　下面

$g_4(x,y)=\psi_1(x)\varphi_1(y)$,……,

$g_{15}(x, y)=\psi_1\left(x-\frac{1}{2}\right)\psi_1\left(y-\frac{1}{2}\right)$，再下面

$g_{16}(x, y)=\psi_2(x)\varphi_2(y)$ 直至

$g_{63}(x, y)=\psi_2\left(x-\frac{3}{4}\right)\psi_2\left(y-\frac{3}{4}\right)$，$\cdots$.

我们已经看到，这个序列可以分段，并且满足 $4^j \leqslant k < 4^{j+1}$ 的 $g_k(x, y)$ 就构成了 $P_j \otimes P_j$ 在 $P_{j+1} \otimes P_{j+1}$ 的正交补空间的正交基.

12. 注释与述评

正如我们在引言中已经指出的，第一个小波正交基是 J.O. Strömberg 在〔223〕中构造的. 下面介绍他的作法 . 设 V_j $(j \in \mathbb{Z})$ 是由 $r \geqslant 1$ 阶样条构成的 $L^2(\mathbb{R})$ 的多分辨率分析. 为构造一个 W_0 中的函数 ψ，以使得 $\psi(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是 W_0 中的一组正交基，J.O. Strömberg 引入了 V_0 与 V_1 之间的一个中间空间，记为 $V_{\frac{1}{2}}$. 函数 $f \in V_{\frac{1}{2}}$，当且仅当 $f \in V_1$，并且当 f 限制在 $[0, \infty)$ 时与一个 V_0 中的函数在 $[0, \infty)$ 的限制相同（换言之，f 的 r 阶导数的不连续点，或是正整数、零，或是负半整数与负整数）. 用 $Tf(x)=f(x-1)$ 表示平移 1 的算子 T: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$，则 $V_{\frac{1}{2}} \subset T(V_{\frac{1}{2}})$，$T^k(V_{\frac{1}{2}})$ $(k \in \mathbb{Z})$ 构成一个嵌入序列，它们的併在 V_1 中稠，它们的交就是 V_0. 最后，$V_{\frac{1}{2}}$ 在 $T(V_{\frac{1}{2}})$ 中的余维数是 1. 事实上，$V_{\frac{1}{2}}$ 是由 $\lambda(f)=\left(\frac{d}{dx}\right)^r f\left(\frac{1}{2}+0\right)-\left(\frac{d}{dx}\right)^r f\left(\frac{1}{2}-0\right)$ 在

$T\ (V_{\frac{1}{2}})$上定义的线性形式 λ 的核.

然后，Strömberg 考虑了 $T\ (V_{\frac{1}{2}})$ 的函数 ψ，用 $\|\psi\|_2$ 使它单位化后，在参考空间 $L^2\ (\mathbb{R})$ 的 Hilbert 结构意义下，它与 $V_{\frac{1}{2}}$ 正交. 除了乘一个模为 1 的常数外，这个函数是唯一的. 显然，$\psi(x-k)\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 V_0 在 V_1 的正交补 W_0 的一组正交基. 事实上，W_0 是 $T^k\ (V_{\frac{1}{2}})$ 在 $T^{k+1}\ (V_{\frac{1}{2}})$ 中的正交补 R_k 的正交直和. 我们有 $R_k=T^k\ (R_0)$.

还要计算 ψ. 我们不用 Strömberg 的方法，只是指出，从本章介绍的一般算法，再加上"正确选择"函数 $\varphi\in V_0$，使得 $\varphi(x-k)\ (k\in\mathbb{Z})$ 成为 V_0 的一组正交基，这样就可以计算 ψ 了. 两个选择 φ_1 和 φ_2 总是由 $\hat{\varphi}_2\ (\xi)=\chi\ (\xi)\ \hat{\varphi}_1\ (\xi)$ 相联系的，其中 $\chi(\xi)$ 是一个以 2π 为周期、模为 1 的实解析函数（若 φ_1，φ_2 是指数下降的话）. 还要要求 φ 支在 $(-\infty, 0]$ 上；这样，相差一个模为 1 的常数外 φ 是唯一的. 在"正确地选择"了 φ 之后，用 $\hat{\varphi}(2\xi)=m_0\ (\xi)\ \hat{\varphi}\ (\xi)$ 定义一个以 2π 为周期的实解析函数 $m_0\ (\xi)$，然后用 $m_1\ (\xi)=e^{-i\xi}\overline{m_0\ (\xi+\pi)}$ 定义 $m_1\ (\xi)$，最后用 $\hat{\psi}\ (2\xi)=m_1\ (\xi)\ \hat{\varphi}(\xi)$ 定义 ψ. 结果，ψ 就是 Strömberg 的小波（至多相差一个模为 1 的常数）. 由此得出，ψ 在无穷远处是负指数阶的，这个指数衰减同我们在本章详细介绍过的（关于 $\frac{1}{2}$）对称的小波的指数下降相同.

Strömberg 的发现没有得到大众对它应有的了解. Strömberg 的小波已直接被 G. Battle 和 P. Federbush 用在量子场论的重正则化的工作中了（〔8〕，〔9〕，〔10〕).

第二个小波正交基是在 1985 年夏偶然地被发现的. 那时作

者想证明，不存在一个 Schwatrz 类的函数 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，使得序列 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x-k)$ $(j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基．由于计算的效力和奇特的处理方式，Littlewood－Paley 小波诞生了．这与我们初始的观点是不一样的．

相应的高维小波的计算是与 P. G. Lamarie 合作完成的．

由于与 S. Mallat 合作，不久以后，出现了 r 正则多分辨率分析的概念．所有这些奇迹般出现的东西在我们已经给出的计算中已变成既简单又自然．

这里，我们回忆一下著名的 Calderon 等式（[35]），它是小波级数展开的连续形式．设 $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个积分为零的函数，满足 $\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t}=1$ $(\xi \neq 0)$. 设 $\tilde{\psi}=\overline{\psi}(-x)$，$\psi_t=t^{-n}\psi(x/t)$，以及同样地 $\tilde{\psi}_t=t^{-n}\tilde{\psi}(x/t)$.

这样，对所有的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，有

$$f=\int_0^\infty f * \tilde{\psi}_t * \psi_t \frac{dt}{t}. \tag{12.1}$$

为说明它，只要在等式两边作 Fourier 变换就行了．这时有平凡的式子

$$\hat{f}(\xi)=\int_0^\infty \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t},$$

从对 ψ 的假设，就得到了结论．

A. Grossmann 和 J. Morlet 对 Calderon 等式作了以下重要的解释．从 ψ 出发，用 $\psi_{(a,b)}(x)=a^{-\frac{n}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ 定义小波，其中 $a>0$, $b \in \mathbb{R}^n$; b 是小波的中心而 a 是小波的宽度．

下面约定，$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的“小波变换”是用 $F(a,b)=$

$(f, \psi_{(a,b)})$定义的 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的函数．一旦计算出所有这些小波系数，由等式

$$f(x)=\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} F(a, b)\psi_{(a,b)}(x)\, db\frac{da}{a^{1+n}}, \qquad (12.2)$$

可以完全恢复函数 f．

一切说明 $\psi_{(a,b)}$ 仿佛构成了一组正交基：在计算出小波系数后，它们就好象是 f 的坐标；在恢复 f 时，使用这些坐标当系数．

读者也许会认为，(12.2) 只不过是 (12.1) 的同义重复，没什么意思．然而实际上，几何的语言却更富有想象力．

最后，我们想用图 5 的“Whitney 方体”铺满 $\mathbb{R}_+^{n+1}$，从而用一个离散形式代替 (12.2)，并由此进入下一章．

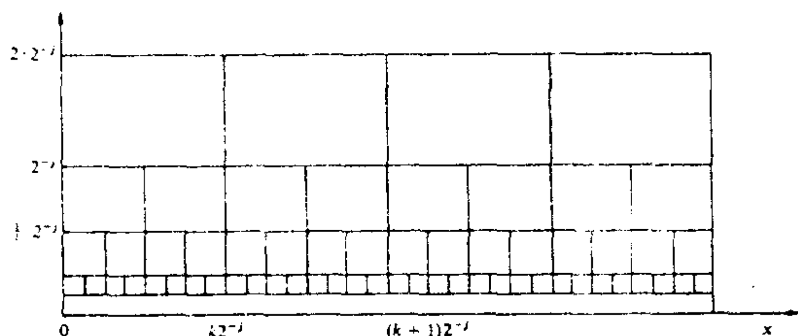


图 5

我们粗略地用 2^{-j} 代替 a，用 $k2^{-j}$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ 代替 b，然后用 Whitney 方体的体积，即 $2^{-(n+1)j}$（它就是 a^{1+n}）代替 $dadb$．这样，(12.2) 就变成

$$f(x)\cong\sum_j\sum_k \alpha(j, k)\, 2^{nj/2}\psi(2^jx-k). \qquad (12.3)$$

自然，(12.3) 只不过是一个近似．这种逼近的数学理论很多是由 I. Daubechies 给出的（这种逼近，在迭代后可以写成一个精确的

公式)，这是下章的内容．

我们不想不谈到小波对场论中重正则化计算的应用就结束本章．所提的问题归结为对有 2, 3 或 4 个实变量的函数空间定义一个特殊的路径积分．我们将按照 P. Federbush 的方法并仅限于二维情形．

下面解释怎样计算形式的积分

$$I(p)=\int_{\Omega} p(\varphi)\ e^{-S(\varphi)}\ d\varphi\ ,$$

其中 Ω 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的实值函数的向量空间（事实上，不幸这是分布），而 $S(\varphi)=\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|_2^2+\frac{M}{2}\|\varphi\|_2^2+\lambda\|\varphi\|_4^4$，$M>0$ 是质量，$\lambda>0$ 是个小参数．设 $S_0(\varphi)=\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|_2^2+\frac{M^2}{2}\|\varphi\|_2^2$ 及 $S_I(\varphi)=\lambda\|\varphi\|_4^4$; I 表示“非线性相互作用”．

首先应弄清楚，测度 $d\varphi$ 是什么．我们要这样选择它：让它对 $\lambda=0$ 是适合的，在这种情形再模仿 Wiener 积分的定义．

为此，我们想做一个“变量替换”，把 φ 变成一个序列 $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots)$，把 $d\varphi$ 变成正规的 Gauss 测度 $\prod_0^{\infty}\mu_j$，其中 $d\mu_j=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\alpha_j^2/2}d\alpha_j$．我们要求替换是线性的并且是 1－1 对应．这就意味着 $\varphi=\alpha_0u_0+\cdots+\alpha_ku_k+\cdots$，并且这个级数展开式使得测度 $\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\|\nabla\varphi\|_2^2-\frac{M^2}{2}\|\varphi\|_2^2\right)d\varphi$ 变成 $\prod_0^{\infty}\mu_j$．由此得出 $\|\nabla\varphi\|_2^2+M^2\|\varphi\|_2^2=((M^2-\Delta)\varphi,\ \varphi)=\sum_0^{\infty}\alpha_k^2$．换言之，函数 $\sqrt{-\Delta+M^2}\ u_k$ 应构成 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一组正交基．B. Bettle 和 P. Federbush 认为 $\sqrt{-\Delta+M^2}\ u_k$ 就是小波正交基．事实上，这些作者仅考虑了边长 $\leqslant 1$ 的二进方体．即他们使用了由 $\varphi(x-\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{Z}^n)$ 和小波 ψ_λ $(\lambda\in\Lambda_j,\ j\geqslant 0)$ 构成的

正交基. 为与 Battle 和 Federbush 所用的记号一致，我们记这些正交基为 ψ_k $(k\geqslant 0)$，便得到了重要的等式 $\varphi(x)=(-\Delta+M^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_0^\infty \alpha_k\psi_k$.

这表明，$\varphi(x)$ 表示成为系数是具有同样分布的、中心的、独立的 Gauss 变量随机级数. 我们将发现，“积分变量”构成了所有 Brown 运动轨迹的集合的 Wiener 积分是这种情形的类似.

事实上，Brown 运动的一个表示恰恰由计算随机级数 $\sum\alpha_k\psi_k(t)$ 的原函数得到的，其中 $\psi_k(t)$ 现在是一维小波，而 α_k 的意义如上.

再来计算积分

$$I(p,\ \lambda)=\int_\Omega p(\varphi)e^{-S(\varphi)}\ d\varphi=\int_\Omega p(\varphi)e^{-\lambda\|\varphi\|_4^4}e^{-S_0(\varphi)}\ d\varphi\ .$$

我们应弄清 $p(\varphi)$ 的意义. 事实上，它与通常的有限个变量 α_k 的多项式有关. 即这个积分表现为概率测度（该测度当 $\lambda>0$的存在性就是场论所提出的问题）的矩.

因此，借助将在第 VI 章中讲述的用小波级数系数大小的阶对经典函数空间的刻划，我们想知道，已知参考测度是概率测度 $e^{-S_0(\varphi)}\ d\varphi$ 时，$\|\varphi\|_4$ 是否几乎一定是有限的. 这又要知道，$\sum\alpha_k\psi_k(x)$ 是否几乎一定是属于（分布的）空间 $W^{-1,\ 4}$; 由定义，$W^{-1,\ 4}$ 是由分布$S=f_0+\frac{\partial}{\partial x}f_1+\frac{\partial}{\partial y}f_2$ 组成的，其中 f_0, f_1 和 f_2 都属于 $L^4(\mathbb{R}^2)$. 应用在第 VI 章将被证明的判别法（它仅仅对小波系数的模提出条件），可以验证 $\|\varphi\|_4^4$ 几乎一定是无穷！积分 $I(p,\ \lambda)$ 就表现为一个收敛到 0 的无穷乘积. 为了重新使它有意义，应该**重正规化**. 符合这种精神的第一个想法是积分的收敛方式不过多地依赖于多项式 p 的选择. 这样，商 $I(p_2,\ \lambda)/I(p_1,\ \lambda)$ 就有更多的机会收敛，其中 p_1, p_2 是多项式. 从这个观点就可在作无穷乘积时取

极限．而在作无穷乘积时，限制 α_k 的指标 k 在一个有限集合 A 中，这些 A 的併是 $\mathbb{N}$．在 $S_0(\varphi)$ 与 $S_I(\varphi)$ 中，用 0 代替 $k \notin A$ 的变量 α_k．这样，积分就是对有限个实变量进行的，显然，第一个重正规化在于寻找当 $\mathbb{N}$ 的有限子集 A 构成一个上升到 $\mathbb{N}$ 的序列时，商 $I^A(p, \lambda)/I^A(1, \lambda)$ 的极限．

但这还不够，最好再做第二个重正规化，并且把它与第一个同时做（在 Federbush 的教科书中，第一个重正规化称为截断）．第二个重正规化是要用具有更多振动的代数表达式代替多项式，以均衡引起收敛到 0 的 $\|\varphi\|_4^4$ 这项．建议读者参考〔107〕及本书末尾的其它参考文献．

第Ⅳ章　斜交小波

1. 引　言

在正交小波基存在以前，J. Morlet (O. R. I. C. Elf Aquitaine 的地质物理工程师) 在探测石油时，对地震信号的处理中就使用了小波。

后来，J. Morlet 所使用的方法被 I. Daubechies 从数学上证实 ([87]). 本章讲述 J. Morlet 迭代算法的 L^2 收敛性.

与正交小波不同，L^2 收敛性并不蕴含可以把 "Morlet小波" 用到除参考空间 $L^2(\mathbb{R})$ 外的其它函数空间去。

事实上，从 Tchamitchian 博士以及以后 P. G. Lamarié 的工作可以得到以下结果：对所有 $P>2$，存在属于 Schwartz 类的实变量的函数 $\theta(x)$，它的所有的矩都是零，并且具有以下两个看上去矛盾的性质:

(a) 函数 $2^{\frac{j}{2}}\theta(2^jx-k)(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 的集合是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组 Riesz 基.

(b) 这个集合在 $L^p(\mathbb{R})$ 中不是完全的.

后者不是由于 $L^p(\mathbb{R})$ $(2<P<\infty)$ 空间特有的病态，而且 $L^p(\mathbb{R})$ 空间也没有什么病态. 当试图用非正交小波去分析 Hölder 空间 C^α 时，也有不完全性. 事实上，有类似的命题成立，即对任意 $m\geq 1$，与任意 $\alpha\in(0,m)$，存在两个函数 φ 与 ψ，它们是 C^α 类的，有紧支集，并且使函数 $\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 与 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)(j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z})$ 的集合是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组 Riesz 基，但是这个集合在 C^α (带有弱拓扑，以此拓扑试验函数在 C^α 中稠密) 中不是完全的.

同样，上述集合在连续函数空间中 (带有任何紧集上一致收

敛的拓扑）也是不完全的．

在除 L^2 以外的其它函数空间使用"斜交小波"还是个难题．我们现在也不知怎么解决它．

2. 斜结构（或"框架"）

设 H 是一个 Hilbert 空间，它的内积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$．我们用 Λ 表示一个离散集合，用 $l^2(\Lambda)$ 表示平方可和族 $x_\lambda\,(\lambda\in\Lambda)$ 构成的空间．用 $\varepsilon_\lambda\,(\lambda\in\Lambda)$ 表示 $l^2(\Lambda)$ 的典范基，即 $\varepsilon_\lambda(\lambda')=0\,(\lambda'\neq\lambda)$ 及 $\varepsilon_\lambda(\lambda')=l\,(\lambda'=\lambda)$．

Hilbert 空间的指标集为 Λ 的一族向量 $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 称为一个"框架"（法语中称为斜结构），如果用 $T(\varepsilon_\lambda)=e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 在 ε_λ 的有限线性组合上定义的算子 T 可以延拓成从 $l^2(\Lambda)$ 到 H 的线性连续算子，并且被延拓的算子 T 是满的．

这表明，存在一个常数 C_1，使得

$$\left\|\sum\alpha_\lambda e_\lambda\right\|_H\leqslant C_1\left(\sum|\alpha_\lambda|^2\right)^{1/2}\tag{2.1}$$

这时，也存在一个常数 C_2（由 Banach 定理），使得对任意 $x\in H$，可以找到一列 $\beta_\lambda\in l^2(\Lambda)$，有

$$x=\sum\beta_\lambda e_\lambda\quad 及\quad\left(\sum|\beta_\lambda|^2\right)^{1/2}\leqslant C_2\|x\|\tag{2.2}$$

成立．

因此有 T 的共轭算子 T^*: $H\to l^2(\Lambda)$，T^* 是连续的，并且 $\|T^*x\|\geqslant C_2^{-1}\|x\|$ $(\forall x\in H)$. 从对这两个性质的解释知，存在两个常数 $c_2\geqslant c_1>0$，

$$c_1\|x\|\leqslant\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle x,e_\lambda\rangle|^2\right)^{1/2}\leqslant c_2\|x\|\tag{2.3}$$

而 (2.3) 是在实际中更常用的定义.

用

$$L(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda \tag{2.4}$$

定义一个新的线性连续算子 $L: H\to H$. 用它改写 (2.3), 则 (2.3) 就恰好表示: 在自共轭算子的意义上下式成立

$$c_1 1\leqslant L\leqslant c_2 1. \tag{2.5}$$

可以用同一常数 $\delta>0$ 去乘每个 e_λ, 这样在 (2.5) 中我们可以假设 $c_2<2$.

存在两个常数 c_1, c_2, 使得 $0<c_1<c_2<2$, 并且 (2.5) 成立. 这等价于存在常数 $r<1$, 使得

$$\| 1-L \| \leqslant r. \tag{2.6}$$

这就是这些工程师们赋予 (2.6) 的意义.

我们把族 $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 当做它们仿佛是正交基, 则可以把 x 写成 $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda+x_1$, 其中 x_1 是小误差. 这件事没有大错. 事实上, $\| x_1 \| \leqslant 1-\| x \|$. 因此我们可以重复使用这种算法直至成功

$$x_1=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x_1, e_\lambda\rangle e_\lambda+x_2$$

....

$$x_k=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x_k, e_\lambda\rangle e_\lambda+x_{k+1}$$

....

显然，有 $\| x_k \| \leqslant r^k \| x \|$. 把这些等式全加起来，就得到一个真正的分解

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle y, e_\lambda \rangle e_\lambda , \tag{2.7}$$

其中，y 可以从 x 出发真正地算出来. 设 $L=I+R$, 就有 $x_k=(-R)^k x$, 于是 $y=L^{-1}(x)$.

只要假设每个向量 $x\in H$, 就可以以坚实稳妥的方式（在 (2.1) 及 (2.2) 的意义上)，把它写成 $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的线性组合的形式. 最终，我们有了一种简单有效的方法，用它可以作出一个通用的分解.

斜结构（或“框架”）的一个特别重要的情形是由 Riesz 基提供的. 这时除了 (2.1) 和 (2.2) 外，还有 (2.1) 的反向不等式，即对某个常数 $\delta>0$, 有

$$\| \sum\alpha_\lambda e_\lambda \| \geqslant \delta \left(\sum| \alpha_\lambda |^2 \right)^{1/2} . \tag{2.8}$$

换言之，算子 T: $l^2(\Lambda) \to H$ 是这两个 Hilbert 空间的同构.

3. I. Daubechies 准则

设 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 是一个积分值为零的函数，我们把它与由下式定义的一列 $\beta(k)(k\in\mathbb{Z})$ 联系起来:

$$\beta(\kappa)= \sup_{1\leqslant| \xi | \leqslant 2} \sum_{-\infty}^{\infty}| \hat{\psi}(2^j\xi) \| \hat{\psi}(2^j\xi+2k\pi) |. \tag{3.1}$$

又设

$$\sup_{1\leqslant| \xi | \leqslant 2} \sum_{-\infty}^{\infty}| \hat{\psi}(2^j\xi)|^2\leqslant C<\infty.$$

最后，引入常数

$$r=\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{j}\xi)|^{2}. \tag{3.2}$$

定理 1　使用上述符号及假设，此外还设

$$r>2\sum_{1}^{\infty}\sqrt{\beta(k)\beta(-k)}\ , \tag{3.3}$$

则 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^{j}x-k)$ $(j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z})$ 的集合是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个斜结构（或“框架”）.

为证明它，使用准则 (2.3). 这又导致估计下面的和 $S(f)$.

$$S(f)=\sum_{j}\sum_{k}|(f,\psi_{j,k})|^{2}, \tag{3.4}$$

其中

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^{j}x-k).$$

由 Parseval 公式知

$$\langle f,\psi_{j,k}\rangle=\frac{1}{2\pi}\,2^{-j/2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\xi)\exp(i2^{-j}k\xi)d\xi.$$

当 j 固定时，我们用下面的引理来计算 $\sum_{k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^{2}$.

引理 1　设 $g(t)\in L^{2}\cap L^{2}$, 对任意 $\delta>0$, 构造周期为 $2\pi\delta^{-1}$ 的函数 $G(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}g(t+2k\pi\delta^{-1})$, 则有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\exp(ik\delta t)dt\right|^{2}=\frac{2\pi}{\delta}\int_{0}^{2\pi\delta^{-1}}|G(t)|^{2}\,dt.$$

这个引理不是别的，正是周期为 $\frac{2\pi}{\delta}$ 的函数 G 的 Plancherel 公式.

在我们的情形，$\delta=2^{-j}$，$g(\xi)=\hat{f}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\xi)$，因此 $G_j(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi+2\pi l 2^j)\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\xi+2\pi l)$. 最后，

$$S(f)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi 2^j}|G_j(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.5}$$

用二重不等式展开 $|G_j(\xi)|^2$,

$$\sum|z_l|^2-2\sum_{l<m}\sum|z_l|\ |z_m|\leqslant|\sum z_l|^2\leqslant\oint|z_l|^2+2\sum_{l<m}\sum|z_l|\ |z_m|.$$

对 ξ 积分后得

$$S_0(f)-2S_1(f)\leqslant S(f)\leqslant S_0(f)+2S_1(f). \tag{3.6}$$

证明的步骤主要在于验证

$$r\|f\|_2^2\leqslant S_0(f)\leqslant C\|f\|_2^2 \tag{3.7}$$

及

$$S_1(f)\leqslant\sum_l^{\infty}\sqrt{\beta(k)\beta(-k)}\ \|f\|_2^2\ . \tag{3.8}$$

容易估计主项 $S_0(f)$. 首先注意到：区间 $[2\pi l 2^j, 2\pi(l+1)2^j)$ 构成了 $\mathbb{R}$ 的一个分解. 先对 $l\in\mathbb{Z}$ 来简化，得 $S_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi$. 使用关于 ψ 的假设，就得到 (3.7).

再考虑 $S_1(f)=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{l<m}\sum I(j,l,m)$，其中

$$I(j,\ l,\ m)=\int_0^{2\pi 2^j} |\hat{f}(\xi+2\pi 2^j l)||\hat{\psi}(2^{-j}\xi+2\pi l)||\hat{f}(\xi+2\pi 2^j m)|$$

$$|\hat{\psi}(2^{-j}\xi+2\pi m)|\,d\xi.$$

简化 $S_1(f)$ 计算的第一步是设 $m=l+k\,(k\geqslant 1)$，然后设 $t=\xi+2\pi 2^j l$. 两个变量 $l\in\mathbb{Z}$ 及 $\xi\in[0,\ 2\pi 2^j)$ 就被 $t\in\mathbb{R}$ 及 $k\geqslant 1$ 所代替.

我们得到

$$S_1(f)=\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_k(t)|\hat{f}(t)|dt,$$

其中

$$\sigma_k(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}t)||\hat{f}(t+2\pi 2^j k)||\hat{\psi}(2^{-j}t+2\pi k)|.$$

因此，使用 $\beta(k)$ 的定义和 Cauchy-Schwartz 不等式，就得到

$$\sigma_k(t)\leqslant\sqrt{\beta(k)}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}t)||\hat{\psi}(2^{-j}t+2\pi k)||\hat{f}(t+2\pi k 2^j)|^2\right)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_k(t)|\hat{f}(t)|dt\leqslant\|\hat{f}\|_2\|\sigma_k\|_2=\sqrt{2\pi}\ \|f\|_2\|\sigma_k\|_2,$$

这又导致估计

$$\mathrm{I}_k=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}t)||\hat{\psi}(2^{-j}t+2\pi k)||\hat{f}(t+2\pi 2^j k)|^2\ dt.$$

为此，作变量替换 $s=t+2k\pi 2^j$，得到

$$I_k=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}s)\|\hat{\psi}(2^{-j}s-2\pi k)\|\hat{f}(s)|^2ds$$

$$\leqslant\beta(-k)\|\hat{f}\|_2^2=2\pi\beta(-k)\|f\|_2^2 .$$

由此得出

$$S_1(f)\leqslant 2\sum_{1}^{\infty}\sqrt{\beta(k)\beta(-k)}\ \|f\|_2^2 ,$$

这就蕴含着定理 1.

有了这个准则，I. Daubechies 用一台微机，从小波 $\psi(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \pi^{-\frac{1}{4}}(1-x^2)\ e^{-\frac{x^2}{2}}$ 出发，这是 Gauss 分布 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的二阶导数，规范化使得 $\|\psi\|_2=1$，证明了 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ ($j\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}$) 是一个框架. 所用的方法可以用来计算第 2 节中迭代算法的速度. 此例的重要性可以从 J. Morlet 用它处理地震信号看出.

在实际应用上，人们“极大地过分取样了”，用同一个 ψ，构成框架

$$\psi^{\#}_{j,k}(x)=\gamma 2^{j/8}\psi(2^{j/4}x-k/2),\ (j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z},\ \gamma>0).$$

再由适当地选择 $\gamma>0$，在 (2.6) 中得到 $\gamma<10^{-2}$. 于是可以用 $\psi^{\#}_{j,k}$ 做第一个逼近，仿佛它们就是正交基. 如果对它的精确性不满意，只需再重复一到二次.

应当着重指出，这个收敛速度的计算仅依赖于 $L^2(\mathbb{R})$ 模. 我们还想讨论更远些的问题：对其它函数空间的兴趣.

I. Daubechies 准则的另一个重要应用是对复 Hardy空间 $\mathbb{H}^2$ 的函数，它完美地给出了它的原子分解的方法. 让我们回忆 $\mathbb{H}^2$的定义.

设 Ω 是复平面上由 $y>0$ 定义的开半平面；让 $\mathbb{H}^2$ 表示满足 $\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx<\infty$ 的全纯函数 $f(z)$ 构成的 Hilbert 空间. 若满足这个条件，则 $f(z)$ 在实轴上有一个迹，记为 $f(x+i0)$，它是由 $\lim_{y\downarrow 0} f(x+iy)$ 定义的. 这个极限在 $L^2(\mathbb{R})$ 意义上同时也在几乎处处的意义上存在. 最后，Hilbert 空间 $\mathbb{H}^2$ 保范地浸入到 $L^2(\mathbb{R})$ 中，这是由 Paley－Wiener 定理决定的：$f\in\mathbb{H}^2$，当且仅当 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\hat{f}(\xi)$ 在 $\xi<0$ 时为零.

我们还不知道是否存在一个属于 Schwartz 类 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 又属于 $\mathbb{H}^2$ 的函数 ψ，使得函数 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 构成 $\mathbb{H}^2$ 的 Hilbert 基或 Riesz 基.

但是 Daubechies 准则轻而易举地就给出了 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 的框架. G. Weiss 和他的合作者们曾从理论上证明过这种框架的存在性（〔73〕）. 下面是把其中涉及的数值常数弄清楚的第一个例子.

从 $\psi(x)=(x+i)^{-2}$ 出发，它显然属于 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$. 由 Daubechies 判别法，$2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 的一个框架. 我们甚至可以限于取 $k\in2\mathbb{Z}$：即在上述两个函数中仅取一个函数时，还是得到一个框架. 但是，反之，容易证明，存在一个实常数 $q_0>2$，使得当 $q>q_0$ 时，函数 $2^{\frac{j}{2}}(2^jx-kq+i)^{-2}$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 只构成真子空间 $F\subset\mathbb{H}^2$ 但 $F\neq\mathbb{H}^2$ 的无条件基.

是否存在临界值 q_0'，使得当 $1\leqslant q<q_0'$ 时，函数 $2^{\frac{j}{2}}(2^jx-kq+i)^{-2}$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 构成 $\mathbb{H}^2$ 的框架；但当 $q>q_0'$

时，$2^{\frac{j}{2}}(2^jx-kq+i)^{-2}$ 只是 $\mathbb{H}^2$ 的真子空间的 Riesz 基呢？我们还不知怎样回答这个问题.

4. Riesz 基与 L^p 收敛

从小波 $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 出发，$2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ ($j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$) 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基. 于是知 ψ 的各阶矩都是零. 我们甚至可以选取 ψ 使它的Fourier 变换支在 $\frac{2\pi}{3}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8\pi}{3}$ 上.

设 $0\leqslant r<1$，以 r 为参数定义 ψ 的扰动 θ 为 $\theta(x)=\psi(x)-\sqrt{2}\,r\,\psi(2x)$. 因此，

$$2^{j/2}\theta(2^jx-k)=\theta_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)-r2^{(j+1)/2}\psi(2^{j+1}x-2k).$$

再用另外的方法写清楚它，就是

$$\theta_{j,k}=(1-rU)\psi_{j,k},$$

其中 U: $L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ 是由 $U(\psi_{j,k})=\psi_{j+1,\,2k}$ 定义的部分保范映射. 我们有

定理 2 若 $2<p<\infty$ 且 $2^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}<r<1$，则函数 $\theta_{j,k}$ 的集合是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组 Riesz 基，但在 $L^p(\mathbb{R})$ 中不完全.

确切地说，我们要证明，$\theta_{j,k}$ 的线性组合在 $L^p(\mathbb{R})$ 中的闭包的余维数是无穷的.

先来验证，$\theta_{j,k}$ 构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组 Riesz 基. 为此，注意到算子 $I-rU$: $L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ 当 $r\in[0,1)$ 时是同构.

为完成定理 2 的证明，还需要构造函数 $g\in L^p(\mathbb{R})$，它不恒等

于零，但与所有的函数 $\theta_{j,k}$ 正交．因此，我们希望对任意的 $k\in\mathbb{Z}$ 及任意的 $j\in\mathbb{Z}$，$(g,\ \psi_{j,k})=r(g,\ \psi_{j+1,\ 2k})$．这样就有无穷多个可能的选择．我们给出一个例子．用小波基 $\psi_{j,\ k}$ 分解 g: $g(x)=\sum\limits_{z}\sum\limits_{k}\alpha(j,k)\psi_{j,k}$．

当 $j=0$ 而 $k\neq 1$ 时，取 $\alpha(j,\ k)=0$; 而取 $\alpha(0.1)=1$. 由此及关系式 $\alpha(j,\ k)=r\alpha(j+1,\ 2k)$ 就得到：当 $j\leqslant -1$ 时，$\alpha(j,\ k)=0$. 最后，当 $j\geqslant 1$ 时，$\alpha(j,\ 2^j)=r^{-j}$; 而当 $k\neq 2^j$ 时，$\alpha(j,k)=0$.

因此，$g(x)=\sum\limits_{6}^{\infty}g_j(x)$, 而 $\|\ g_j\ \|_q=r^{-j}2^{\frac{j}{2}}\,2^{\frac{j}{q}}\ \|\psi\|_q$. 由此知，只要 $2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}<r$, 就有 $g\in L^q(\mathbb{R})$. 定理 2 就全部证毕．

现在说明如何修改定理 2 的证明，使它适用于 Hölder 空间 C^α $(\alpha>0)$. 为此，先注意到：C^α 是 Besov 空间 $B_1^{-\alpha,1}$ 的共轭空间，并且 Schwartz 函数空间 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是 C^α 的一个稠密的向量子空间，这时 C^α 用的拓扑是 $\sigma(C^\alpha,\ B_1^{-\alpha,1})$. 因此，一个自然的问题就是要知道，函数 $\theta_{j,k}$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 的集合当 C^α 带有拓扑 $\sigma(C^\alpha,\ B_1^{-\alpha,1})$ 时在 C^α 中完全．为证明情况不是如此，只需构造一个函数 $g\in B_1^{-\alpha,1}$, 它与所有的 $\theta_{j,k}$ 正交，但不恒等于零．

使用与 $L^p(\mathbb{Z}\mathbb{Z}$情形相同的构造方法．我们有 $g(x)=\sum\limits_{0}^{\infty}g_j(x)$, 并且 $g_j(x)$ 在 $B_1^{-\alpha,1}$ 中的模是 $O(r^{-j}2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})})$. 最后，当 $r>2^{-(\alpha+\frac{1}{2})}$ 时，该级数收敛．

这表明，尽管 r 很接近于零，函数 $\theta_{j,k}$ 的线性组合 $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 在 $\alpha+\dfrac{1}{2}>\log_2(\dfrac{1}{r})$ 时，还是不能接近函数 $f\in C^\alpha$.

在结束本章时，应该着重指出，我们不知道在使用 J. Morlet 的自然的“框架”时，这些病态是否仍然存在．

确切地说，我们不知道：从小波 $\psi(x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$ 出发，函数 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 是否构成了整个 $L^p(\mathbb{R})(1<p<\infty)$.

第V章　小波，Hardy空间 H^1 与它的共轭空间BMO

1. 引　言

本章给出小波理论的一个特别优美的应用，即用它讨论(实的)Hardy空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 和它的共轭空间BMO.

我们从有关Banach空间的向量级数的几个一般定义开始.

设 B 是一个Banach空间，设 $\sum_0^\infty x_k$ 是由 B 的元组成的级数，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在有限集合 $F(\varepsilon)\subset\mathbb{N}$，使得对所有包含 $F(\varepsilon)$ 的有限集合 F，有

$$\left\|x-\sum_{k\in F}x_k\right\|\leqslant\varepsilon\ ,$$

则称这个级数无条件地收敛到 $x\in B$.

如果存在 x，使得级数无条件地收敛到 x，则称级数 $\sum_0^\infty x_k$ 是无条件收敛的. 若一个级数 $\sum_0^\infty x_k$ 是无条件收敛的，则存在常数 C，使得对所有整数 $n\geqslant1$，对所有满足 $|\alpha_0|\leqslant1$，…，$|\alpha_n|\leqslant1$ 的实数或复数列，有

$$\|\alpha_0x_0+\cdots+\alpha_nx_n\|\leqslant C\ .$$

在有限维时，从这个重要的不等式知道，我们的级数是依范数收敛的. 在无限维时，这并不显然.

B 中的向量级数 $\sum_0^\infty x_k$ 无条件收敛这件事可以用另一种方法来表达，即它是交换收敛的．即，对正整数的任意置换 $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，级数 $\sum_0^\infty x_{\sigma(k)}$（在 B 的范数下）收敛到 $x=\sum_0^\infty x_k$．

无条件收敛的概念适用于 x_k 的序不起任何特别作用的这种情形．为表示指标的集合是无序的，我们就叫它可和族．

在定义 Banach 空间的无条件基之前，我们先定义 Schauder 基．

如果任意 Banach 空间 B 的向理 $x\in B$ 都可以写成

$$x=\alpha_0 e_0+\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_k e_k+\cdots\ , \tag{1.1}$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_k, \cdots$ 是数值系数；而收敛定义为

$$\lim_{n\uparrow+\infty}\ \| x-\alpha_0 e_0-\alpha_1 e_1-\cdots-\alpha_n e_n \|=0\ ; \tag{1.2}$$

最后还要求系数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots$ 以唯一方式由（1.1）和（1.2）所确定，则称 Banach 空间 B 的向理 $e_0, e_1, \cdots, e_k, \cdots$ 是 B 的一组 Schauder 基．

如果对所有的 $x\in B$，级数(1.1)无条件地收敛到 x，那么这组 Schauder 基就是一组无条件基．

这个定义的一个等价形式是：要求序列 $e_k(k\in\mathbb{Z})$ 在 B 中是完全的(即 e_k 的有限线性组合构成了 B 的稠子集)，并且满足以下性质：存在一个常数 $C\geqslant 1$，使得对任意整数 n，对任意满足 $\sup_k|\alpha_k|\leqslant 1$ 的数列 α_k 及任意数列 β_k，有

$$\left\|\sum_0^n \alpha_k\beta_k e_k\right\|\leqslant C\left\|\sum_0^n \beta_k e_k\right\|.$$

要求一组 Schauder 基是一组无条件基的另一种说法是提出以下问题：是否有有加在系数的模 $|\alpha_k|$ 上的准则并找到使 $\sum_0^\infty \alpha_k e_k$

在 B 中收敛的充分必要条件?

基 $e_k(k\in\mathbb{N})$ 是无条件基，这意味着：使级数 $\sum_0^\infty \alpha_k e_k$ 在 B 中收敛的充分必要条件只是对模 $|\alpha_k|$ 提出的，并且如果序列 α_k 满足这些条件，则对任意满足 $|\beta_k|\leq|\alpha_k|$ 的序列，$\beta_k(k\in\mathbb{N})$ 也自动地满足它们.

最后一种观点是研究线性连续算子 $T: B\to B$，它以 $e_k(k\in\mathbb{N})$ 为特征向量. 用 λ_k 记相应的特征值，这时 $|\lambda_k|\leq\|T\|$，这是因为我们假设 $e_k\neq 0$. 说序列 $e_k(k\in\mathbb{N})$ 是 Banach 空间 B 的无条件基，这意味着：反过来说，任意的序列 $\lambda_k\in l^\infty(\mathbb{N})$ 皆为某个线性连续算子的特征值序列，该算子 T：$B\to B$ 完全由 $T(e_k)=\lambda_k e_k$ 所决定.

当序列 $e_k(k\in\mathbb{N})$ 是三角函数系时，以函数 $e^{ikx}(k\in\mathbb{Z})$ 为特征值的算子称为乘子. 函数 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}$ 构成了 $L^2(0, 2\pi)$ 的正交基. 显然，所有序列 $\lambda_k\in l^\infty(\mathbb{Z})$ 都是乘子 ($L^2(0, 2\pi)$ 函数的 Fourier 系数). 至于 $L^p(0, 2\pi)$，乘子定理是精巧的. 我们现在不给出充分条件，这个条件把乘子理论与 Calderon－Zygmund 算子联系了起来.

相反地，如果用第Ⅲ章第 11 节的周期小波代替三角函数系，那么对 $L^p(0, 2\pi)$ 空间 $(1<p<\infty)$ 就不再有任何问题. 事实上，对任意有界序列 $\lambda_k\in l^\infty(\mathbb{N})$，由 $T(g_k)=\lambda g_k$ 定义的算子总是一个 Calderon－Zygmund 算子，如在第Ⅶ章将见到的，它是 L^p 有界的.

非周期情形是类似的，小波构成了 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 的一组无条件基.

本章讨论 $p=1$ 这一极限情形. 小波不是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的无条件基. 它只是具有以下重要性质的某些 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的无条件基：即它的小波级数无条件地收敛于 f. 本章的目的就是刻划这些函数.

自然，这样表述 H^1 空间与我们为读者方便将要介绍的传统方式不同．在本章中，我们将证明：(在〔75〕中的) H^1 的原子定义等价于用小波定义的 H^1．在最后一节，我们将叙述 H^1 的其它定义．

H^1 的共轭空间是 John – Nirenberg 的 BMO 空间．我们将介绍这个共轭性的证明(从我们采用的观点来看，这是一个同义反复)．小波也构成了 BMO 空间的一组无条件基．所述级数的收敛是在 $\sigma(\mathrm{BMO}, H^1)$ 拓扑意义取的．BMO 函数的小波系数将满足著名的 Carleson 平方条件．这个重要结论表明，可以有效地用小波进行局部 Fourier 分析，它完全适用于由局部的 L^2 模定义的 BMO.

2. 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的等价定义

我们从引言中提出的问题出发．当 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，并且它的小波级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda}(f, \psi_\lambda)\,\psi_\lambda(x)$ 无条件地收敛于 f 时，我们就记为 $f\in H^1(\mathbb{R}^n)$.

正如我们在引言中已经指出的，这就导致了存在一个常数 $C\geqslant 1$，使得对任意有限集合 $F\subset\Lambda$，对任意取值为 ± 1 的序列 $\varepsilon(\lambda)$ $(\lambda\in F)$，有

$$\Big\|\sum_{\lambda\in F}\varepsilon(\lambda)\,(f\,,\psi_\lambda)\,\psi_\lambda(x)\Big\|_1\leqslant C\,. \tag{2.1}$$

我们在 (2.1) 式左边对所有的 F 及所有的序列 $\varepsilon(\lambda)$ $(\lambda\in F)$ 取上确界，并认为它是 f 在我们所考虑的空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的第一个模．显然，应该明确所使用的小波 ψ．在整个本节中，我们都使用第Ⅲ章第 8 节中的具有紧支集的正则小波．该定义不依赖于所使用的小波基(条件只是对应的多分辨率分析是 r 正则的 $(r\geqslant 1)$)．这由以下推理容易证实．我们宁愿在第Ⅷ章再讨论这个独立性，因为从 Calderon – Zygmund 算子的一般定理，十分

清晰地就得到了它.

使用著名的 Khintchine (Хинчин) 不等式来变换 (2.1). 即存在常数 $C>1$, 使得对所有整数 $n\geqslant 1$, 对所有的复数列 $a_1, \cdots, a_n$, 有

$$\left(\sum_1^n |a_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_1}\cdots\sum_{\varepsilon_n}|\varepsilon_1 a_1+\cdots+\varepsilon_n a_n|, \tag{2.2}$$

其中右边求和是对所有由 +1 和 −1 构成的序列 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$ 来取的.

由此不等式知存在常数 C, 使得

$$\int_{R^n}\left(\sum_{\lambda\in F}|(f, \psi_\lambda)|^2 |\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2} dx\leqslant C$$

对所有有限集合 $F\subset\Lambda$ 成立.

这就给出了 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的第二个定义, 即 f 满足

$$\int_{R^n}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|(f, \psi_\lambda)|^2 |\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2} dx<\infty. \tag{2.3}$$

(2.3) 左边的数值是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的第二个模. 我们还不知第二个模是否等价于第一个模. 因为从 (2.1) 到 (2.3) 丢掉了信息: 我们用一个在平均上满足的不等式代替了一个 (对 ±1 的序列) 一致满足的不等式. 理论上的一个令人惊讶之处在于这两个模竟是等价的.

为了证明这件事, 需要通过其它三个模而间接得到. 首先明确形如 $2^{nj/2}\psi^\varepsilon(2^j x-k)$ 的小波, 其中 $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in E$, E 是基数为 2^n-1 的有限集合. 事实上, E 是集合 $\{0, 1\}^n$ 但要去掉 $(0, 0, \cdots, 0)$.

必要时用平移 $l\in\mathbb{Z}^n$ 的小波函数代替 ψ^ε, 我们可以假设 $\int_0^1\cdots\int_0^1|\psi^\varepsilon(x)|^2 dx\neq 0$ (以后我们都这样做). 由此显然得出:

若 $x\in A^{\varepsilon}$，就有 $|\psi^{\varepsilon}(x)|\geqslant c>0$，其中 A^{ε} 是 $[0,1)^n$ 中的某个方体，并且 $|A^{\varepsilon}|\geqslant\gamma>0$.

对所有的 $\lambda=k2^{-j}+\varepsilon 2^{-j-1}\in\Lambda$，我们用 $Q(\lambda)$ 表示由 $2^jx-k\in[0,1)^n$ 定义的方体，而用 $R(\lambda)$ 表示由 $2^jx-k\in A^{\varepsilon}$ 定义的子方体. 我们总有 $|R(\lambda)|\geqslant\gamma|Q(\lambda)|$. (2.4)

于是要用到的第三个模就是

$$\left\|\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\,|Q(\lambda)|^{-1}\chi_{R(\lambda)}(x)\right)^{1/2}\right\|_1 \tag{2.5}$$

其中 $\chi_{R(\lambda)}$ 是 $R(\lambda)\subset Q(\lambda)$ 的特征函数.

$R(\lambda)$ 的唯一性质是不等式(2.4)，$R(\lambda)$ 也没有精确的几何定义.

我们要用的第四个模是在(2.5)中令 $R(\lambda)=Q(\lambda)$ 而定义的.

在我们关于 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 讨论中出现的最后一个模不再用小波级数了，它涉及 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 著名的原子定义.

定义 1 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子是一个属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数 $a(x)$，对它存在一个球 B，其体积记为 $|B|$，而 $a(x)$ 满足以下三条性质:

$$a(x)=0 \qquad (x\notin B)\ ; \tag{2.6}$$

$$\|a\|_2\leqslant|B|^{-\frac{1}{2}}\quad ; \tag{2.7}$$

$$\int_B a(x)\,dx=0\quad , \tag{2.8}$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式知，$a(x)$ 是可积的，并且 $\|a\|_1\leqslant 1$. 因此(2.8)有意义.

若存在一个原子序列 $a_j(x)$，以及一个系数序列 λ_j，使得

$$\sum_0^\infty |\lambda_j| < \infty \quad 和 \quad f(x) = \sum_0^\infty \lambda_j a_j(x) \tag{2.9}$$

成立，则称函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 属于原子 H^1. 显然，$\sum_0^\infty \lambda_j a_j(x)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中是收敛的.

所写的分解不具有任何唯一性. 正如我们马上就要见到的，这种唯一性的缺乏正是这类定理的绝妙之处.

于是我们把 $\sum_0^\infty |\lambda_j|$ 对 f 所有可能的原子分解取下确界定义为模 $\|f\|_{at}$.

本章的主要结果是以下定理.

定理 1 我们给出的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的五个定义是等价的.

为讲清证明，我们用 A, B, C, D, E 表示以下五个性质(我们将证明它们的等价性).

(A) $$\sup_{F \subset \Lambda} \sup_{\varepsilon(\lambda) = \pm 1} \left\| \sum_{\lambda \in F} \varepsilon(\lambda) \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x) \right\|_1 < \infty \quad ;$$

(B) $$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 \; |\psi_\lambda(x)|^2 \right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad ;$$

(C) $$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 \; |Q(\lambda)|^{-1} \chi_{R(\lambda)}(x) \right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^n) \ ,$$

其中 $R(\lambda) \subset Q(\lambda)$ 满足 $|R(\lambda)| \geq \gamma |Q(\lambda)|$, 而 $\gamma > 0$ 是一个常数;

(D) $$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 \; |Q(\lambda)|^{-1} \chi_{Q(\lambda)}(x) \right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad ;$$

最后

(E) $f(x)=\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 是一个原子分解.

我们已经知道(A)$\Longrightarrow$(B)，而(B)$\Longrightarrow$(C)是显然的. 证明的中心部分是(C)$\Longrightarrow$(E). **这要求从级数 $f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 出发，用不相交的集合 $\Lambda(k,l)$ 分解 Λ，然后重新组合.（带有系数的）原子 $\lambda_j a_j(x)$ 就是由部分和 $\sum_{\lambda\in\Lambda(k,l)}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 给出的.**

用下面要定义的某水平的集合，这种算法就直接从系数 $\alpha(\lambda)$ 完成.

为了得到蕴含关系(C)$\Longrightarrow$(E)，我们的途径是：证明(C)$\Longrightarrow$(D)以及不等式

$$\|f\|_1\leqslant C\left\|\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ |Q(\lambda)|^{-1}\chi_{R(\lambda)}(x)\right)^{1/2}\right\|_1 \tag{2.10}$$

对所有级数 $f(x)=\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 成立.

验证(E)$\Longrightarrow$(D)是一个容易的练习，因为这只需分别考虑每个原子，由此，(E)$\Longrightarrow$(A)就是显然的了.

另一个说明大概是有用的. 为了使用这五个准则中的任一个，应该从一个可以把这些准则施之于它的数学对象出发. 这个数学对象将是阶数小于 r（r 是小波的正则性指标）的分布. 然而，不是任何分布都合适. 例如 $f=1$，它的所有小波系数都是零，因而满足所有的准则. 然而 $1\notin H^1(\mathbb{R}^n)$.

为避免这个问题，我们要求级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda}(f,\psi_\lambda)\ \psi_\lambda$ 在分布意义上收敛于 f.

现在我们来证明定理 1 的蕴含关系(C)$\Longrightarrow$(E).

3. 系数水平上的原子分解

对任意的$j\in\mathbb{Z}$与任意的$k\in\mathbb{Z}$，我们用$Q(j,k)$表示由$2^jx-k\in[0,1)^n$所定义的二进方体，所有这个二进方体的集合记为$\mathscr{Q}$．我们要研究序列$\alpha(Q)$ $(Q\in\mathscr{Q})$的某些(实的或复的)空间．对这个序列α，α的支集是所有使得$\alpha(Q)\neq 0$的二进方体$Q\in\mathscr{Q}$的集合；而α的支柱是组成支集的二进方体的併.

若Q和Q'是两个二进方体，并且$Q\cap Q'\neq\emptyset$，则这两个二进方体必定一个包含另一个.

因此，如果$\mathscr{C}$是体积$|Q|$不超过某一有限常数的二进方体的非空集合，那么每个方体$Q\in\mathscr{C}$就被包含在某一最大方体$\widetilde{Q}\in\mathscr{C}$中，这些二进方体$\widetilde{Q}$是两两不相交的．我们把所有方体$Q\subset\mathscr{C}$的并集$\Omega$称为$\mathscr{C}$的支柱．因此，**这些最大的二进方体属于$\mathscr{C}$，并且它们构成了$\mathscr{C}$的支柱的一个分解.**

现在我们来定义叫做"帐篷空间"的 Banach 空间T_1．这个空间是[71]中的帐篷空间的离散形式.

我们把序列$\alpha(Q)$ $(Q\in\mathscr{Q})$与一个由

$$S(\alpha)(x)=\left(\sum_{x\in Q}|\alpha(Q)|^2\ |Q|^{-1}\right)^{1/2}$$

定义的可测函数$S(\alpha)$: $\mathbb{R}^n\to[0,+\infty]$联系起来.

定义 2 如果函数$S(\alpha)\in L^1(\mathbb{R}^n)$，那么则称复数列$\alpha(Q)(Q\in\mathscr{Q})$属于$T_1$，并且规定$\|\alpha\|=\int_{\mathbb{R}^n}S(\alpha)\ dx$.

由$|\alpha(Q)|\ |Q|^{\frac{1}{2}}\leqslant\|\alpha\|$，容易验证$T_1$是 Banach 空间.

让我们再回到"帐篷"里去.

设 R 是一个二进方体．"R 上的帐篷"是所有二进方体 $Q\subset R$ 构成的集合 $\mathscr{C}$. 为理解这个术语，我们按如下方式去想．设 $n=1$, 用复数 $(k+\frac{1}{2})2^{-j}+\frac{i}{2}2^{-j}$ 来表示二进区间 $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ $(j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z})$. 这样，可以把有关的复数画出来，就(轻松地)验证这些点集很像以 R 为底的帐篷．

定义 3 如果存在一个二进方体 R, 它包含 α 的支柱，并且满足

$$\sum|\alpha(Q)|^2\leqslant\frac{1}{|R|}, \tag{3.1}$$

则称序列 $\alpha=\alpha(Q)_{Q\in\mathscr{Q}}$ 是一个原子．

因此，可以选择包含 α 支柱的最小二进方体 R, 而这个最小的二进方体则称为原子 α 的基．因此，原子 α 的支集就包含在"R 上的帐篷"里．

我们来验证：原子 α 属于 T_1, 并且 $\|\alpha\|\leqslant1$. 为此，注意到 $S(\alpha)$ 的支集包含在原子 α 的基 R 中，应用 Cauchy－Schwarz 不等式，便有

$$\int S(\alpha)dx=\int_R S(\alpha)dx\leqslant|R|^{\frac{1}{2}}\left(\int(S(\alpha))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant1.$$

为了验证最后一个不等式，注意到下式是方便的

$$S(\alpha)(x)=\left(\sum|\alpha(Q)|^2\ |Q|^{-1}\chi_Q(x)\right)^{1/2},$$

其中 $\chi_Q(x)$ 是 Q 的特征函数．

定理 2 序列 $\alpha=(\alpha(Q))_{Q\in\mathscr{Q}}$ 的下面三个性质是等价的．

存在常数 $r\in(0, 1]$, 对任意方体 $Q\in\mathscr{Q}$, 存在可测集 $R\subset Q$,

使得 $|R|\geqslant r|Q|$，并且

$$\left(\sum_{Q\in\mathscr{O}}|\alpha(Q)|^2\ |Q|^{-1}\chi_R(x)\right)^{1/2}\in L^1(\mathbb{R}^n)\ ; \tag{3.2}$$

$$\alpha\in T_1; \tag{3.3}$$

存在原子的序列 α_j 和数列 λ_j，使得

$$\sum_0^\infty \lambda_j\alpha_j=\alpha,\ \ 并且\ \sum_0^\infty|\lambda_j|<\infty. \tag{3.4}$$

在开始证明之前，对所有测度 $|E|<\infty$ 的可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，我们定义 E 的扩张 E^*. 为此，从一个系数 $\beta\in(0,1)$ 出发；β 严格地小于 γ. 考虑所有满足 $|Q\cap E|\geqslant\beta|Q|$ 的二进方体的集合 $\mathscr{C}$. 称 $Q\in\mathscr{C}$ 的这些方体的併集为 E^*.

这时，所有方体 $Q\in\mathscr{C}$ 都包含在最大(对包含关系而言)方体 $\widetilde{Q}\in\mathscr{C}$ 中. 因为当 $Q\in\mathscr{C}$ 时有 $|Q|\leqslant 1/\beta|E|$，所以最大方体是存在的. 它们两两不交，并且构成了 E^* 的一个分解. 因此

$$|E^*|=\sum|\widetilde{Q}|\leqslant\frac{1}{\beta}\sum|\widetilde{Q}\cap E|\leqslant\frac{|E|}{\beta}.$$

我们看到，相差一个零测度集，E^* 包含了 E. 事实上，用 Lebesque 微分定理，对几乎所有的 $x\in E$，有

$$\lim_{x\in Q}\frac{|Q\cap E|}{|Q|}=1,$$

其中极限是对包含 x 的二进方体取的，并让方体的直径趋于零. 因此，对几乎所有的 $x\in E$，至少存在一个包含 x 的二进方体 Q，使得 $|Q\cap E|>\beta|Q|$. 由此得到 $Q\in E^*$，从而 $x\in E^*$.

显然，若 $E\subset F$，则 $E^*\subset F^*$，其中 E 与 F 是两个具有有限测度的可测集.

回到定理 2 的证明. 设

$$\sigma(x)=\left(\sum_{Q\in\mathscr{C}}|\alpha(Q)|^2\ |Q|^{-1}\chi_R(x)\right)^{1/2}$$

用 E_k 表示满足 $\sigma(x)>2^k$ 的 x 的集合，则 $E_k\supset E_{k+1}$，并且

$$\sum_{-\infty}^{\infty}2^k|E_k|\leqslant 2\int_{R^n}\sigma(x)dx. \tag{3.5}$$

(3.4) 中的 $\sum_0^{\infty}|\lambda_j|<C\|\sigma\|_1$ 就是从这个不等式得到的.

考虑所有满足 $|Q\cap E_k|\geqslant\beta|Q|$（其中 $\beta\in(0,\gamma)$ 是一常数）的二进方体 Q 构成的集合 $\mathscr{C}_k(k\in\mathbb{Z})$. β 以后再定. 因此这些方体 $Q\in\mathscr{C}_k$ 的并就是 E_k^*，而且 $|E_k^*|\leqslant\frac{1}{\beta}|E_k|$. 故

$$\sum_{-\infty}^{\infty}2^k|E_k^*|\leqslant\frac{2}{\beta}\|\sigma\|_1. \tag{3.6}$$

记 $\mathscr{C}_k$ 的最大二进方体为 $Q(k,l)$. 它们构成了 E_k^* 的一个分解.

首先看到 α 的支集 $\mathscr{C}$ 包含在 $\mathscr{C}_k$ 的并集里. 事实上，若 $\alpha(Q)\neq 0$，则对某个整数 k，有 $|\alpha(Q)|\ |Q|^{-\frac{1}{2}}>2^k$. 因此，对任意的 $x\in R\subset Q$，$\sigma(x)>2^k$. 最终由 E_k 的定义得 $E_k\cap Q\supset R$，并且 $|E_k\cap Q|\geqslant|R|\geqslant\gamma|Q|>\beta|Q|$. 故 $Q\in\mathscr{C}_k$.

用 Δ_k 表示 $Q\subset\mathscr{C}_k$ 但 $Q\notin\mathscr{C}_{k+1}$ 的 Q 的集合：$\Delta_k=\mathscr{C}_k\backslash\mathscr{C}_{k+1}$. 如果 $Q\in\Delta_k$，并且 $Q\subset Q(k,l)$，那么就写成 $Q\in\Delta(k,l)$. 因此，这些 $\Delta(k,l)$ 就构成了 Δ_k 的一个分解（某些可能是空集，因而也就略掉了）.序列 α 的支集 $\mathscr{C}$ 就是这些 $\Delta(k;l)$ $(k\in\mathbb{Z},\ l\in F(k))$ 的不相交的并. 最后一点表明，$\Delta(k,l)$ 不是空集.

引理 1: 符号如上，把序列 $\alpha(Q)$ 限制到 α 支集的每一个不相交的部分 $\Delta(k,l)$ 上，（在一个明显的单位化后），便得到形为

$$\alpha=\sum\sum\lambda(k,\ l)\,\alpha_{(k,l)} \tag{3.7}$$

的原子分解，其中 $\alpha_{(k,l)}$ 是原子，$\alpha_{(k,l)}$ 的基包含在 $Q(k,\ l)$ 中．

为证明它，先建立以下的不等式:

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\Delta(k,l)}|\alpha(Q)|^2 &\leqslant \frac{\gamma^2}{\gamma-\beta}\int_{Q(k,l)\setminus E_{k+1}}\sigma^2(x)dx \\ &\leqslant \frac{\gamma^2}{\gamma-\beta}\,4^{k+1}|Q(k,l)|.\end{aligned} \tag{3.8}$$

下面就是 (3.8) 的证明．

若二进方体 $Q\in\Delta(k,\ l)$，即一方面 $Q\in Q(k,\ l)$，另一方面 $Q\notin\mathscr{C}_{k+1}$．这时就有 $|Q\cap E_{k+1}|<\beta|Q|$，因此

$$|R\cap E_{k+1}|<\beta|Q|\leqslant\frac{\beta}{\gamma}\,|R|. \tag{3.9}$$

还可以写成

$$|R\setminus E_{k+1}|\geqslant\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)|R|\geqslant\frac{\gamma-\beta}{\gamma^2}\,|Q|.$$

然而 $\sigma^2(x)\geqslant\sum_{Q\in\Delta(k,l)}|\alpha(Q)|^2\,|Q|^{-1}\chi_R(x)$．故

$$\begin{aligned}\int_{Q(k,l)\setminus E_{k+1}}\sigma^2(x)dx &\geqslant\sum_{Q\in\Delta(k,l)}|\alpha(Q)|^2\,|Q|^{-1}\,|R\setminus E_{k+1}| \\ &\geqslant\frac{\gamma-\beta}{\gamma^2}\sum_{Q\in\Delta(k,l)}|\alpha(Q)|^2.\end{aligned}$$

这就证明了 (3.8) 的第一个不等式．对第二个不等式，因为当

$x \notin E_{k+1}$时，$\sigma(x) \leqslant 2^{k+1}$. 设

$$\lambda(k,l) = |Q(k,l)|^{1/2}\left(\sum_{Q \in \Delta(k,l)} |\alpha(Q)|^2\right)^{1/2},$$

并定义原子 $\alpha_{k,l}(Q)$ 如下：当 $Q \in \Delta(k,l)$ 时，$\alpha_{k,l}(Q) = \dfrac{1}{\lambda(k,l)}\alpha(Q)$;
当 $Q \notin \Delta(k,l)$ 时，$\alpha_{k,l}(Q) = 0$.

由构造方法知，$\alpha_{k,l}$是原子，而 $\alpha_{k,l}$的基包含在 $Q(k,l)$ 中.

还剩下验证 $\sum\sum\lambda(k,l) \leqslant C\|\sigma\|_1$. 事实上，由(3.8)，这个级数被下式所控制

$$\frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma-\beta}}\sum\sum 2^k|Q(k,l)| = \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma-\beta}}\sum 2^k|E_k^*|$$

$$\leqslant \frac{2\gamma}{\beta\sqrt{\gamma-\beta}}\sum 2^k|E_k| \leqslant \frac{4\gamma}{\beta\sqrt{\gamma-\beta}}\|\alpha\|_1.$$

4. 回到地面

我们可以来证明定理 1 的蕴含关系了：(B)$\Rightarrow$(C)$\Rightarrow$(E) 或 (D)$\Rightarrow$(C)$\Rightarrow$(E).

事实上，从 $\left(\sum_{\lambda \in \Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ |\psi_\lambda(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 出发，已知当 $\lambda = 2^{-jk} + 2^{-j-1}\varepsilon\ (\varepsilon \in E)$ 时，对 $x \in R$，$R \subset Q$，并且$|R| > \gamma|Q|$ 时，有 $|\psi_\lambda(x)| \geqslant c|Q|^{-\frac{1}{2}}$ 成立，其中 $\gamma > 0$，$c > 0$ 是两个常数.因此用证明定理 2 的写法，有 $\sigma(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 从定理 2 知，构成$\alpha(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ 的序列 $\alpha^\varepsilon(Q)$ $(\varepsilon \in E)$ 中的每一个属于帐篷空间 T_1，并有一种原子分解 $\alpha^\varepsilon(Q) = \sum\lambda_j^\varepsilon\ \alpha_j^\varepsilon(Q)$.

如果小波基 ψ^ε 是有紧支集的，那么这个验证就纯粹是代数的．这时，ψ_Q^ε 的支集包含在 mQ 中，$m\geq 1$ 是一个常数．用 Q_j^ε 表示原子 $\alpha_j^\varepsilon(Q)$ 的基，则 $\alpha_j^\varepsilon(x)$ 的支集就包含在 mQ_j^ε 中．我们有

$$\| a_j^\varepsilon \|_2 = \left(\sum_Q |\alpha_j^2(Q)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{|Q_j^\varepsilon|^{1/2}} ,$$

并且定义 $a_j^\varepsilon(x)$ 的级数同样在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中收敛．因此可以逐项积分，就得到 $\int a_j^\varepsilon(x)dx=0.$

我们刚才证明了函数 $m^{-\frac{n}{2}} d_j(x)$是原子．于是就实现了在序列的空间T_2水平上的分解．

事先，我们已经证明了基本的不等式

$$\left\| \sum \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \right\|_1 \leqslant C \left\| \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 \ |Q(\lambda)|^{-1}\chi_{R(\lambda)}(x) \right)^{1/2} \right\|_1 . \tag{4.1}$$

(E)$\Longrightarrow$(D) 的证明是容易的．设

$$S(f)(x) = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |(f,\ \psi_\lambda)|^2 \ |\psi_\lambda(x)|^2 \right)^{1/2},$$

当 $\|f\|_\alpha$ 有限时，为证明 $S(f)$ 是可积函数，由凸性，只需分别对每个原子验证．

引理 2　存在常数 C，使得对任意中心在 x_0，半径为 r 的球上的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子 f，$\int_{\mathbb{R}^n} S(f)(x)dx\leqslant C.$

为此，设 $C>1$ 是一个依赖于 m 的常量，它将在证明过程中确定．

用球 $\widetilde{B}=\{x: |x-x_0|\leqslant Cr\}$ 和二进环 $R_k=\{x: 2^kCr\leqslant|x-x_0|\leqslant 2^{k+1}Cr\}(k\in\mathbb{N})$ 分解 $\mathbb{R}^n$.

这样,

$$\int_{R^n} S(f)dx=\int_{\widetilde{B}} S(f)dx+\sum_0^{\infty}\int_{R_k} S(f)dx.$$

简单地使用 Cauchy－Schwarz 不等式来控制第一个积分，得到

$$\int_{\widetilde{B}} S(f)dx\leqslant|\widetilde{B}|^{1/2}\|S(f)\|_2=C^{n/2}|B|^{1/2}\|f\|\leqslant C^{n/2}.$$

在处理积分 $\int_{R_k} S(f)dx$ 时，我们先做一个小波的好的局部化，这是为了在 $S(f)$ 中用 $\lambda\in\Lambda^k$ 的部分和去替换 $\lambda\in\Lambda$ 的求和，Λ^k 的定义稍后再给出．然后利用 $\int f(x)dx=0$，并考虑到当 $\lambda\in\Lambda^k$ 时，小波 ψ_λ 是充分“平坦”的这件事来估计小波系数 (f, ψ_λ)．

下面就是这个估计的简单的细节．我们有 $\psi_\lambda(x)=\psi_Q^\varepsilon(x)$，并且 ψ_λ 的支集包含在 mQ 中．若 mQ 与 B 不相交，则 $(f, \psi_\lambda)=0$；若 mQ 不与 R_k 相交，那么在估计 $\int_{R_k} S(f)dx$ 时就不必考虑相应的 λ. 因此用以下两个条件来定义 Λ^k: mQ 同时与 B 和环 R_k 都相交，这意味着 $2^{-j}\geqslant cr2^k$ (2^{-j} 是 Q 的边长；当 C 充分大时，$c>0$ 是严格正的几何常数).

考虑到小波 ψ_λ 的正则性，考虑到 $\int f(x)dx=0$，我们来控制 (f, ψ_λ)．这时有 $|(f, \psi_\lambda)|\leqslant C\ 2^{nj/2}2^jr$. 因此当 $x\in R_k$ 时，就有 $S(f)(x)\leqslant C'2^{-k(n+1)}r^{-n}$，从而

$$\sum_{0}^{\infty}\int_{R_k} S(f)dx\leqslant C''.$$

直接可以验证蕴含关系(C)$\Longrightarrow$(A). 定理 1 证毕. 再回到由(4.1)得到的控制, 我们看到, 若用 $\pm\alpha(\lambda)$ 代替 $\alpha(\lambda)$ 时, (4.1)的右边不变.

5. 原子和分子

当所用的小波没有紧支集时, 系数水平的原子分解就不再是 $f\in H^1$ 的原子分解了, 而是一个分子分解.

分子属于加权的 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega(x)dx)$ 空间. 我们回忆一下它的定义. 设 $\omega(x)>0$ 是满足 $\int_{R^n}\frac{dx}{\omega(x)}<\infty$ 的可测函数, 用 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega(x)dx)$ 表示满足 $\int|f(x)|^2\omega(x)dx<\infty$ 的可测函数的空间.

根据这个定义, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 就有 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega(x)dx)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

考虑 $\omega_s(x)=(1+|x|)^s$ $(s>n)$ 这一特殊情形, 我们用 M^s 表示由积分值为零的函数组成的 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega_s dx)$ 的子空间.

那么有

命题 1 对任意 $s>n$, M^s 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的稠密子空间.

对 $f\in M^s$, 定义函数 f_j 如下: 当 $|x|\leqslant 1$ 时, $f_0(x)=f(x)$; 当 $|x|>1$ 时, $f_0(x)=0$. 下面, 当 $2^{j-1}<|x|\leqslant 2^j$ $(j\geqslant 1)$ 时, 令 $f_j(x)=f(x)$; 在其它地方 $f_j(x)=0$.

因此, 设 $f\in M^s$, 则 $\|f_j\|_2\leqslant\varepsilon_j 2^{-js/2}$, 其中 $\sum_{0}^{\infty}|\varepsilon_j|^2<\infty$, 并且

$\sum_0^\infty I_j=0$, 而 $I_j=\int f_j(x)\,dx$. 用 Cauchy－Schwarz 不等式，有 $|I_j|\leqslant c(n)\varepsilon_j 2^{-j(s-n)/2}$. 于是，若设 $\sigma_j=I_j+I_{j+1}+\cdots$, 则 $|\sigma_j|\leqslant\eta_j 2^{-j(s-n)/2}$, 其中 $\eta_j=c(n)\sum_{k\geqslant j}\varepsilon_k 2^{-(s-n)(k-j)/2}$ 属于 $l^2(\mathbb{N})$.

我们想用下式代替 f_j

$$a_j(x)=f_j(x)+\sigma_{j+1}\theta_{j+1}(x)-\sigma_j\theta_j(x),$$

以把 f_j 变成一个原子，其中 $\theta_j(x)=r(n)2^{-nj}$(当 $|x|\leqslant 2^j$ 时), 及 $\theta_j(x)=0$(当 x 取其它值时). 调整常数 $r(n)$, 使得 $\theta_j(x)$ 的积分值是 1, 这就保证了 $a_j(x)$ 的积分值为零.

(因为 f 的积分值为零)，我们有 $\sigma_0=0$, 因而 $\sum_0^\infty a_j(x)=\sum_0^\infty f_j(x)$ $=f(x)$.

$a_j(x)$ 的支集包含在球 $|x|\leqslant 2^{j+1}$ 中；最终还有 $\|a_j\|_2\leqslant\varepsilon'_j\,2^{-js}$, 其中 $\varepsilon'_j\in l^2(\mathbb{N})$. 这样，我们就得到了 f 的原子分解.

从 H^1 的原子属于 M^s 这件事，M^s 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密也就简单地得到了.

有了命题 1 以后，我们就可以定义 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的分子了.

定义 4 设 $s>n$ 是一个实数，一个中心在 x_0, 宽度为 $d>0$ 的分子就定义为属于 M^s 的一个函数，它由下式而单位化.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\left(1+\frac{|x-x_0|}{d}\right)^s dx\right)^{1/2}\leqslant d^{-n/2}. \tag{5.1}$$

从命题 1 的证明直接得到，一个分子的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 模不超过常数 $C(s,n)$, 该常数与 x_0 与 $d>0$ 无关.

(用一个常数 $r(n,s)>0$ 去乘以后) $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子就是分子. 因

此当我们系统地用分子去代替(3.4)的原子后，$H^1(\mathbb{R}^n)$的定义不变.

正像 G. Weiss 在〔75〕中着重指出的，当想证明一个线性连续算子 T: $L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 可以延拓成 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的线性连续算子 T: $H^1(\mathbb{R}^n)\to H^1(\mathbb{R}^n)$ 时，$H^1(\mathbb{R}^n)$ 定义的这种灵活性总是不可缺少的. 我们只需证明: T 把 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子变成 $H^1(\mathbb{R}^n)$的一个分子. 在第Ⅶ章，我们将看到这个论断被用到 Calderon－Zygmund 算子上.

6. John 和 Nirenberg 的 BMO 空间

字母BMO意味着“有界平均振动”(Bounded Mean Oscillation)，它将由以下定义来解释.

我们从研究 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的线性连续泛函开始. 一个这样的泛函 λ 完全由它在稠密向量子空间 $M^s\subset H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的限制所确定. 而 M^s 在 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^s\,dx)$ 中的余维数为 1. 设 $\theta(x)\in L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^s dx)$, 并且 $\int\theta(x)dx=1$. 我们任意选定 $\lambda(\theta)$ 的值而把 λ 延拓到整个 $L^2(\mathbb{R}^2, (1+|x|)^s dx)$ 上.

这样，λ 就成为 $L^2(\mathbb{R}^2, (1+|x|)^s dx)$ 的共轭空间的一个元. 即它是 $L^2(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^{-s}dx)$ 中的一个函数 $b(x)$.

$H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解中的每一个原子显然属于 M^s, 又由于所定义的 $b(x)$ 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的一个线性连续泛函，所以必然存在常数 C, 使得对任意的原子 $a(x)$, $\left|\int a(x)b(x)dx\right|\leqslant C$. 换言之，对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球 B, 对所有支在 B 上的平方可积的并且积分值为零的函数 $a(x)$, 有

$$\left|\int a(x)b(x)dx\right|\leqslant C|B|^{1/2}\|a\|_2 .$$

这个条件等价于存在常数 γ_B，使得

$$\left(\int_B |b(x)-\gamma_B|^2\ dx\right)^{1/2} \leqslant C|B|^{1/2}. \tag{6.1}$$

当 γ_B 取为 $b(x)$ 在球 B 上的平均值(记为 $m_B b$)时，(6.1)式左边取最小值．不等式(6.1)现在变成了

$$\left(\int_B |b(x)-m_B b|^2\ dx\right)^{1/2} \leqslant C|B|^{1/2}. \tag{6.2}$$

$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(x)-m_B b|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 是球 B 上的随机变量 $b(x)$ 对概率测度 $dx/|B|$ 的均方根．这个均方根构成了字母 BMO 中的"平均振动"MO.

这样可以得到以下结果.

定理 3　设 $b(x)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 是满足

$$\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(x)-m_B b|^2\ dx\right)^{1/2} = \|b\|_{\mathrm{BMO}} < \infty \tag{6.3}$$

的函数，其中上确界是对所有 $\mathbb{R}^2$ 中的球 B 来取的，B 的体积记为 $|B|$，而 $m_B b$ 是 b 在 B 上的平均.

则 $b(x)$ 用

$$\lambda(f)=\sum_0^\infty \lambda_j \int b(x)a_j(x)dx \tag{6.4}$$

定义了 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的一个线性泛函，其中 $a_j(x)$ 是原子，$\sum_0^\infty|\lambda_j|<\infty$，

并且 $f(x)=\sum_0^\infty \lambda_j a_j(x)$.

反之，所有 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的线性连续泛函都可以用这种方式定义.

考虑到前述做法，这个论断是显然的. 唯一精巧之处在于：用(6.4)定义的 $\lambda(f)$ 是否依赖于 f 所选择的表示方法.

如果 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，这个问题的回答是平凡的. 事实上，如果 $0=\sum_0^\infty \lambda_j a_j(x)$，那么部分和 $\sum_0^m \lambda_j a_j(x)$ 按 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 模收敛于 0. 因此可以乘上 $b(x)$ 后积分取极限.

然而条件(6.3)并不保证有 $b(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 这时怎么处理呢？首先看到，BMO 是一个格. 即若 $f\in$BMO，$g\in$BMO 都是实值函数，那么 $\sup(f, g)$ 与 $\inf(f, g)$ 也属于 BMO. 这是由以下引理得出的.

引理 3 设 $f(x)\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，则 $|f(x)|$ 也属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

事实上，设 $\alpha(B)=|m_B f|$，由三角不等式，有

$$||f(x)|-\alpha(B)|\leqslant|f(x)-m_B f|. \tag{6.5}$$

为得到结论，只需在(6.5)式两边平方，然后在球 B 上取平均.

回到定理 3 的证明，我们分别考虑 $b(x)$ 的实部与虚部，它们都满足(6.3). 因此可以假设 $b(x)$ 是实值函数.

其次注意到，常数属于 BMO，并且它的模是0. 对所有的 $N\geqslant 1$，定义 $b_N(x)$ 如下：当 $b(x)\geqslant N$ 时，$b_N(x)=N$；当 $b(x)\leqslant -N$ 时，$b_N(x)=-N$；而当 $-N<b(x)<N$ 时，$b_N(x)=b(x)$. 由引理 3 知，函数 $b_N(x)$ 在 BMO 中一致有界，即 $\|b_N\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant 3\|b\|_{\mathrm{BMO}}$.

设 $\sum_0^\infty \lambda_j a_j(x)=0$，其中 $a_j(x)$ 是原子，并且 $\sum_0^\infty|\lambda_j|<\infty$.

既然现在 $b_N(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，所以 $\sum_0^\infty \lambda_j\int a_j(x)b_N(x)dx=0$.

又因为 $b_N(x)$ 在 BMO 中一致有界，因此

$$\left|\int a_j(x)b_N(x)dx\right| \leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

而

$$\lim_{N\uparrow\infty}\int a_j(x)b_N(x)dx = \int a_j(x)b(x)dx.$$

事实上，设 B_j 是原子 $a_j(x)$ 的支集的球，则 $b(x)\in L^2(B_j)$，并且 $b_N(x)$ 在 $L^2(B_j)$ 中收敛到 $b(x)$.

为了结束证明，使用 $l^1(\mathbb{N})$ 的控制收敛定理，便有

$$0=\lim_{N\uparrow\infty}\sum_0^\infty \lambda_j\int a_j(x)b_N(x)dx = \sum_0^\infty \lambda_j\int a_j(x)b(x)dx.$$

这就是要证明的.

我们想给定义(6.3)一种看上去更精确的形式．为了生成 H^1，这次不用原子，而使用分子．一旦有了共轭性，就有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_{\mathbb{R}^n}|b(x)-m_Bb|^2\left(1+\frac{|x-x_0|}{d}\right)^{-s}dx\right)^{1/2}\leqslant C. \tag{6.6}$$

现在我们用小波级数的描述来完成对 BMO 空间的研究.

为了简化证明的写法，我们使用第Ⅲ章第 8 节紧支集小波来表示．希望读者作为练习把这个证明改造成适用其它的小波基．唯一本质的事是从有 $r\geqslant1$ 正则性的多分辨率分析出发.

定理 4　设 $b(x)\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，则它的小波系数 $\alpha(\lambda)=(b,\psi_\lambda)$ 满足下面的 Carleson 条件:

存在常数 C，使得对任意二进方体 $Q\in\mathscr{Q}$，有

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|\alpha(\lambda)|^2\leqslant C|Q|^{\frac{1}{2}}\ ,\tag{6.7}$$

其中当 $\lambda=2^{-j}k+2^{-j-1}\varepsilon$ 时，$Q(\lambda)$ 是由 $2^jx-k\in[0,\ 1)^n$ 所定义的方体.

反之，若系数 $\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ 满足 (6.7)，则级数 $\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 的和属于 BMO; 该级数依拓扑 $\sigma(\mathrm{BMO},\ H^1)$ 收敛.

首先，我们来说明，为什么 $b(x)\in\mathrm{BMO}$ 时，(6.7) 成立.

小波 ψ_λ 的支集包含在 $mQ(\lambda)$ 中，它与 $Q(\lambda)$ 有相同的中心但边长是 m 倍长.

这样，我们分解 $b(x)$ 为 $b_1(x)+b_2(x)+c(Q)$. 其中 $c(Q)$ 是 $b(x)$ 在 mQ 上的平均; $b_1(x)=b(x)-c(Q)$ (当 $x\in mQ$ 时), $b_1(x)=0$ (当 x 在其它地方). 由对小波支集所作的几何说明知，若 $Q(\lambda)\subset Q$, 则 $(b_2,\ \psi_\lambda)=0$. 此外，每个小波的积分值是零. 剩下就是 $(b,\ \psi_\lambda)=(b_1,\ \psi_\lambda)$, 并且

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|(b,\ \psi_\lambda)|^2\leqslant\sum_{\lambda\in\Lambda}|(b_1,\psi_\lambda)|^2=\|b_1\|_2^2\leqslant m^n\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2|Q|.$$

在这个推理中，小波的正则性不起任何作用.

反之，对反向的包含关系来说，这个正则性是不可缺少的. 设 (6.7) 被满足，B 是以 x_0 为中心、以 $r>0$ 为半径的球. 用 $2^{-q}\leqslant r<2^{-q+1}$ 定义整数 $q\in\mathbb{Z}$. 我们把和 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 分成两部分，每个再分成两部分. 首先考虑边长为 $2^{-j}\leqslant2^{-q}$ 的“小方体”，然后考虑 $j<q$ 的“大方体”. 与小方体有关的小波有两种情形: 它的支集与 B 相交或不相交. 如果一个“小方体”$Q(\lambda)$ 具有性质 $mQ(\lambda)\cap B\neq\Phi$, 那么 $Q(\lambda)$ 一定包含在 B 中，其中 $M>1$ 是一个仅依赖于 m 的常数. 如果我们按照小方体和大方体的分类分解

$b=\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 为 $b=b_1+b_2$，那么 b_1 可以分解成 $b_{1.1}+b_{1.2}$. 其中在 B 上 $b_{1.2}(x)=0$，而 $b_{1.1}$ 涉及包含在 MB 中的小方体．于是

$$\|b_{1,1}\|_2^2\leqslant\sum_{Q(\lambda)\subset MB}|\alpha(\lambda)|^2\leqslant C|B|.$$

现在考虑大方体，考虑级数 $\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 的相应于 b_2 的部分．我们使用以下事实，即小波 $\psi_\lambda(x)$ 是"平的"；以及对给出大方体 $Q(\lambda)$ 的尺寸 2^{-j}，只有 M^n 个小波 $\psi_\lambda(x)$ 在 B 上不恒等于零（都是因为 ψ_λ 的支集包含在 $mQ(\lambda)$ 中），而对这剩下来的 M^n 个小波中的任一个，有 $|\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda(x_0)|\leqslant C2^j2^{nj/2}|x-x_0|$，这里用到了小波的正则性．因此相应的系数 $|\alpha(\lambda)|$ 就被 $C|Q(\lambda)|^{\frac{1}{2}}=C2^{-nj/2}$ 所控制．再求和，因为 $|x-x_0|\leqslant r<2^{q+1}$，就有 $\sum_{j<q}2^j\ |x-x_0|=2^q\leqslant2$，其中 x_0 是 B 的中心，r 是 B 的半径．

定理 4 就全部证完了．在第 XI 章要用到下面的论断，它是定理 4"证明的推论"．

设 $w_\lambda(x)$ $(\lambda\in\Lambda)$ 是具有以下性质的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数：

$$|w_\lambda(x)|\leqslant\frac{C2^{nj/2}}{(1+|2^jx-k|)^{n+1}}\qquad（若\ \lambda=2^{-j}k+2^{-j-1}\varepsilon); \tag{6.8}$$

$$\int w_\lambda(x)dx=0\qquad; \tag{6.9}$$

存在常数 C'，使得对所有的序列 $\alpha(\lambda)\in l^2(\Lambda)$，有

$$\left\|\sum\alpha_\lambda w_\lambda(x)\right\|_2\leqslant C'\left(\sum|\alpha_\lambda|^2\right)^{1/2}, \tag{6.10}$$

则对任意 $b\in\mathrm{BMO}$，系数 $\alpha(\lambda)=\int b(x)w_\lambda(x)dx$ 满足 Carleson 条件(6.7)．

为了看清这个命题，首先注意到(6.10)的共轭形式是下面的不等式：

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|(f,w_\lambda)|^2\right)^{1/2}\leqslant C'\|f\|_2\ , \tag{6.11}$$

其中 f 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的任意函数．

其次，通过一个显然的变量替换后，我们就只需验证(6.7)在 $Q=[0,1)^n$ 的情形成立．称由 $-2\leqslant x_1\leqslant 2,\ \cdots,\ -2\leqslant x_n\leqslant 2$ 定义的方体为 B．如上，分解 $b(x)$ 为 $b(x)=b_0+b_1(x)+b_2(x)$；其中 b_0 是 $b(x)$ 在 B 上的平均；当 $x\in B$ 时，$b_1(x)=b(x)-b_0$，而在其它地方 $b_1(x)=0$；在 B 上 b_2 等于零．

系数(b_0, w_λ)是零，用(6.11)来处理(b_1, w_λ)．还要控制(b_2, w_λ)，为此使用(6.6)，就得到

$$\int_{B^c}|x|^{-n-s}|b_2(x)|^2dx\leqslant C\|b\|^2_{\mathrm{BMO}}\ ,$$

其中 $B^c=\mathbb{R}^n\backslash B$．如果 $Q(\lambda)$ 包含在 $[0,1)^n$ 中，则 $2^{-j}k\in[0,1)^n$；若 $x\notin B$，则 $|x-2^{-j}k|\geqslant c|x|$，其中 c 是常数．从这个简单说明得到

$$\begin{aligned}|(b_2,\ w_\lambda)|&\leqslant C2^{nj/2}\int_{B^c}|2^jx-k|^{-n-1}|b_2(x)|dx\\&\leqslant C2^{-j}2^{-nj/2}\int_{B^c}|x|^{-n-1}|b_2(x)|dx\\&\leqslant C'2^{-j}2^{-nj/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\ ,\end{aligned}$$

这里用到了 Cauchy－Schwarz 不等式，还要把 $|x|^{-n-1}$ 分开写成

$$|x|^{-n-1}=|x|^{-(n/2)-((1+s)/2)}|x|^{-(n/2)-((1-s)/2)} \quad (0<s<1).$$

再求和，得到 $\sum\limits_{Q(\lambda)\subset[0,1)^n} 4^{-j}2^{-nj}$. 由于对每个 $j\geq 0$, 有关的 λ 的数目是 $(2^n-1)2^{nj}$, 因此显然这个和式有限.

7. Maurey 定理

二进 H^1 空间定义如下. 从通常的 H^1 空间出发，我们要模仿它提出二进 H^1 空间的原子的条件，一个二进 H^1 空间的原子是一个支在二进方体 Q 上的函数 $a(x)$, 它具有性质 $\|a\|_2\leq|Q|^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\int a(x)dx=0$.

由此得出，二进 H^1 包含在通常的 H^1 中.

它们是不相同的. 例如，积分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 不都是零的函数 f 不可能属于二进 H^1. 这是因为每一个二进区间 $I\in\mathscr{F}$ 都整个地包含在 $[0, +\infty)$ 或 $(-\infty, 0]$ 中；但所有满足 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2)|f(x)|^2dx<\infty$ 的积分值为零的函数却属于通常的 H^1.

B. Maurey 建立了下面的重要定理.

定理 5 通常的 H^1 空间与二进 H^1 空间(作为 Banach 空间)是同构的.

Maurey 给出的证明建立在 Banach 空间几何方法上. 揭示同

构性的最早的证明是由 L. Carleson 和 Wojtaszczyk 得到的．它在某种方式上预示了小波理论．

这里是 Maurey 定理的一个新证明．我们使用 Haar 系，逐字逐句重复用小波基对通常 H^1 空间的分解来分析二进 H^1 空间．

因此，设 U: $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是由 $U(h_Q^\varepsilon) = \psi_Q^\varepsilon$ 定义的保范变换，其中 h_Q^ε 是 n 维空间中的 Haar 系，它是由阶梯函数给出的多分辨率分析所构造的一种特殊小波．

函数 f 属于二进 H^1，当且仅当对 $\varepsilon \in E$, $f(x) = \sum_\varepsilon \sum_Q \alpha^\varepsilon(Q) h_Q^\varepsilon$, 并且 $\left(\sum_{x\in Q} |\alpha^\varepsilon(Q)|^2 \ |Q|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \in L^1(dx)$. 这与级数 $\sum_\varepsilon \sum_Q \alpha^\varepsilon\ (Q) \psi_Q^\varepsilon$ 属于通常的 H^1 空间的条件完全相同．

这就证明了 Maurey 定理．

在研究 Calderon－Zygmund 算子理论时，**我们将看到 U 可**以延拓成 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的同构，其中 $1<p<\infty$，**但在** $p=1$ 时不对．在另一个方向上 ($p=\infty$)，**我们也**引入二进 BMO 空间．它由满足以下条件的局部平方可积函数组成:

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - m_Q f|^2 \ dx \right)^{1/2} < \infty, \tag{7.1}$$

其中上确界是在所有二进方体的集合上取的．

还可以用 Haar 系刻划二进 BMO，这与用小波基刻划通常的 BMO 是一致的．算子 U 同样也可延拓成二进 BMO 与通常 BMO 之间的同构．

8. 注释与述评

我们略去了空间 H^1 与 BMO 的一些最重要的性质．〔75〕谈到并研究了它们，那是一篇极好的参考文献．

涉及 BMO($\mathbb{R}^n$) 空间，它的一个重要性质是 John－Nirenberg 定理．设 $b(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个局部可积函数，如果存在常数 C，使得对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的球 B，存在常数 $\gamma(B)$，满足

$$\frac{1}{|B|}\int_B |b(x)-\gamma(B)|dx \leqslant C,$$

那么 John 和 Nirenberg 断言：$b(x)\in$BMO．更确切地还有，对指标 $p>1$，存在有限常数 $C(p)$，使得

$$\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(x)-m_Bb|^p\ dx\right)^{1/p} \leqslant C(p). \qquad (8.1)$$

在 $p=\infty$ 时，应该用下式代替 L^∞ 模：

$$\sup_B \frac{1}{|B|}\int_B \exp(\lambda|b(x)-m_Bb|)dx; \qquad (8.2)$$

只要乘积 $\lambda\|b\|_{\mathrm{BMO}}$ 小于某个常数 $c(n)>0$，(8.2) 就有定义．

对 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 空间，我们想介绍与原子定义有关的事情．在原子中不使用 L^2 模，就得到看来更特殊的原子，它满足 $\|a\|_\infty \leqslant \frac{1}{|B|}$，Supp $a\subset B$，以及 $\int_B a(x)dx=0$．用这种特殊原子得到的 H^1 空间也就是我们已经讨论过的 H^1 空间．

这里还有两点补充，它们把 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 空间与 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析联系起来．

从 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 出发，定义极大算子为

$$E_*f(x)=\sup_{-\infty<j<\infty}|E_j(f)(x)|. \qquad (8.3)$$

我们记得，算子 E_j 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 V_j 上的正交投影算子．这时有下面的重要结果．

定理 6 条件 $E.f\in L^1(\mathbb{R}^n)$刻划了 $H^1(\mathbb{R}^n)$.

这个刻划称为极大刻划.

$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|D_jf(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 给出了另一个刻划，其中 $D_j=E_{j+1}-E_j$.

在一个实变量时，Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$ 由全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 的实部组成，现在让我们回忆一下它的定义. 如果 $f(z)$ 是上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 上的全纯函数，当(且仅当) $\sup\limits_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|\,dx<\infty$ 时，就说 $f\in\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. 这样的函数在 $y=0$ 总是有迹的，它定义为当 $y>0$ 并且趋于零时 $f(\cdot+iy)$ 依 $L^1(\mathbb{R})$ 模收敛的极限.

这个迹是 $L^1(\mathbb{R})$ 的一个闭子空间，我们仍把这个空间记为 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ (这里有点语言混乱)，它可由 Paley − Wiener 定理刻划. 这个定理指出: $f\in\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$, 当且仅当 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 并且当 $\xi<0$ 时,

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}f(x)dx=0.$$

因此，每个属于 $H^1(\mathbb{R})$ 空间 (Stein 与 Weiss 给出的实形式) 的函数 f 都可以唯一地写成 $f=u+\overline{v}$，其中 u 和 v 属于 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$. 这个分解是唯一的，它是通过把 $\hat{f}$ 写成 $\hat{f}=\hat{f}\chi_++\hat{f}\chi_-$ 而得到的，其中 χ_+, χ_- 分别[illegible] 0, $+\infty$) 和 $(-\infty, 0]$ 的特征函数. 此外，若 f 是实值函数，那么 f 是全纯空间 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 的函数的实部. 这就是我们称它为“全纯 Hardy 空间的实形式”的理由. 如果我们想要复数域上的 Banach 空间，只需把这些实部的向量空间复值化.

上述结果的一个等价形式是使用 Hilbert 变换. Hilbert 变换定义为: 设 u 和 v 是两个实变量的又取实值的函数，如果 $u+iv$

是一个在上半平面全纯的函数 $f(x+iy)$ 在 $y=0$ 的迹，那么 $H(u)=v$.

还可以用 Fourier 变换来定义 Hilbert 变换：$H(f)=g$，当且仅当 f 和 g 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 有关系 $\hat{g}(\xi)=-i\ \mathrm{sign}\ \xi\cdot\hat{f}(\xi)$.

这样，又有 $H^1(\mathbb{R})$ 的如下定义：$f\in H^1(\mathbb{R})$，当且仅当 f 与 $H(f)$ 都属于 $L^1(\mathbb{R})$，f 在 $H^1(\mathbb{R})$ 中的模定义为这两个函数的 $L^1(\mathbb{R})$ 模之和.

我们现在来说明，为什么 Lusin 面积积分刻划的全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$（该结果是由 Calderon 在 1965 年得到的）与用条件

$$\left(\sum_{I\ni x}|(f,\ \psi_I)|^2\ |I|^{-1}\right)^{1/2}\in L^1(dx)$$

刻划的实的 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$ 很相似．为此，我们先编辑一个字典，用它可以从一种语言过渡到另一种语言．

这个字典把函数 $\frac{1}{2\pi i}(t+i)^{-2}$ 当成小波 $\psi(t)$，把上半平面的点当成二进区间，把上半平面 $v>0$ 中满足 $v>|u-v|$ 的数对 (u,v) 当成包含 x 的二进区间，最后，把函数 $\left(\iint_{\{v\geq|u-x|\}}|f'(z)|^2du\ dv\right)^{1/2}$ 当成 $\left(\sum_{I\ni x}|(f,\ \psi_I)|^2\ |I|^{-1}\right)^{1/2}$.

下面是这种译法的有启发性的根据．函数 $(t+i)^{-2}$ 类似于小波，这是因为它具有正则性，局部性，以及所要求的相消性，的确，$\int_{-\infty}^{\infty}(t+i)^{-2}dt=0$.

现在，与第Ⅳ章的证明一样，对全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^2$ 的函数，为了重建它，可以满足于只知道值 $f'(k2^{-j}+i2^{-j})$ $(k\in\mathbb{Z},\ j\in\mathbb{Z})$．因此，我们使用二进区间 $I=[k2^{-j},\ (k+1)2^{-j})$ 与上半平面的点

$z=k2^{-j}+2^{-j-1}+i2^{-j-1}(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 之间的几何对应. 由于这个对应，$x\in I$ 就相应变成了 $z\in\Gamma(x)$, 其中 $\Gamma(x)$ 是以 x 为顶点， 由 $v>|u-x|$ 定义的锥.

这个相似法则导致了以下的定义和替代. 设 S 是上半平面的点 $k2^{-j}+2^{-j-1}+i2^{-j-1}(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 的集合. 设 $\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}(t+i)^{-2}$, 如果 $z=x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y>0$, 定义 $\psi_z(t)=y^{\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-x}{y}\right)$. 这样，当 $f\in\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 时，Cauchy 公式就给出了 $f'(z)=y^{-\frac{3}{2}}(f,\ \psi_z)$. 对 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 的函数的变化分析表明，当它靠近边界时更重要. 这就导致用"Riemann 和" $\left(\sum_{z\in S\cap\Gamma(x_0)}2^j|(f,\ \psi_z)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 代替 Lusin 函数 $\left(\iint_{\Gamma(x_0)}|f'(z)|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$.

第二个替代是用本章所使用的紧支集小波去代替 $\psi(t)$, 同时用相应的二进区间 $I=[k2^{-j},\ (k+1)2^{-j})$ 去代替点 $z\in S$. 这样，

$\sum_{z\in S\cap\Gamma(x_0)}2^j|(f,\ \psi_z)|^2$ 就变成了 $\sum_{x_0\sigma I}|(f,\ \psi_I)|^2\ |I|^{-1}$.

再回到 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 函数的例子. 我们认为 $\log z$ 在 $\operatorname{Im}z>0$ 全纯，并且是由 $\log 1=0$ 定义的. 这时 $f(z)=z^{-1}(\log z+i)^{-2}$ 是 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 函数的一个例子. $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$ 函数的一个明显的例子定义如下: 当 $|x|>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=0$; 而当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x^{-1}(\log|x|)^{-2}$. 因为带有系数的原子 $\lambda_j a_j(x)$是 f 在"二进环" $U_j=[-2^{-j},\ -2^{-j-1}]\cup[2^{-j-1},\ 2^{-j}]$ 上的限制，所以很容易就写出了这个函数 f 的原子分解.

相反地，函数 $f(x)=x^{-1}(\log x+i)^{-2}$ $(x>0)$ 及 $f(x)=0$ $(x\leqslant 0)$ 尽

管积分值为零，但却不属于 $\mathbb{H}^1(\mathbb{R})$.

这件事可以从 $\log|x|\in\mathrm{BMO}$, 以及 $g(x)=\inf(0, \log|x|)$ 也属于 BMO 看出．g(x) 在 $|x|\leqslant 1$ 时是 $\log|x|$, 而在 $|x|\geqslant 1$ 时是零．容易看到，如果 $f(x)=x^{-1}(\log x+i)^{-2}$ $(x>0)$ 及 $f(x)=0$ $(x\leqslant 0)$, 那么 $\int f(x)g(x)dx=-\infty$.

函数 $\log|x|$ 是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 函数中最著名的例子.这个例子在两个方向上被推广．E. Stein 已经注意到，若 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 是任一个非恒为零的多项式，则 $\log|p(x_1, \cdots, x_n)|\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

另一个推广如下．设 $\mu\geqslant 0$ 是一个 Radon 测度，记 $\mu^*(x)=\sup\limits_{x\in B}\frac{1}{|B|}\mu(B)$. 如果 $\mu^*(x)$ 几乎处处有限，那么 $\log\mu^*(x)\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 当 μ 是 0 点处的 Dirac 质量时，它给出例子 $\log|x|$ (〔75〕).

现在我们来考虑 $H^1(\mathbb{R}^n)$. Stein 和 Weiss 最先把它们定义为 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 并且 R_jf 也都属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的函数的集合，其中 $1\leqslant j\leqslant n$, 而 $R_j=\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ 是 Riesz 变换．因此向量 $(f, R_1f, \cdots R_nf)$ 可以写成

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}u(x,t), \frac{\partial}{\partial x_1}u(x, t), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}u(x, t)\right)\Bigg|_{t=0},$$

其中 $u(x, t)=e^{-t\sqrt{-\Delta}}((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f)$ 是个调和函数．在这里，我们又重新发现了 Stein 和 Weiss 的基本想法，这就是用调和函数的梯度去模仿全纯函数.

决定性的事情是 C. Fefferman 发现了 H^1 与 BMO 之间的共轭性．这使 Coifman 和 Weiss 改变了对 H^1 的看法，而把原子定义作为出发点．建议读者参阅〔109〕和〔75〕.

在〔231〕中，A Uchiyama 解决了用 Riesz 变换以外的算子刻

划 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 这一根本问题．设 $m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 是一个 0 次齐次函数，设 M 是乘子 m 决定的卷积算子：$\mathscr{F}(M(f))=m\hat{f}$，其中 $\mathscr{F}(f)=\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换．

这样，H^1 可以用条件 $M_0f\in L^1, \cdots, M_kf\in L^1$ 刻划，当且仅当相应的乘子 $m_0(\xi), \cdots, m_k(\xi)$(它们在原点外是 C^∞ 的，并且是 0 次齐次的)满足以下条件：对任意 $\xi\neq0$，矩阵

$$\begin{pmatrix} m_0(\xi), & \cdots, & m_k(\xi) \\ m_0(-\xi), & \cdots, & m_k(-\xi) \end{pmatrix}$$

的秩是 2.

我们注意到，现在并不要求 $f\in L^1$(但这是事后必须验证的)．通常的情形是 $k=n$, $m_0(\xi)=1$, $m_j(\xi)=i\xi_1/|\xi|$.

H^1 空间与级数在 L^1 中无条件收敛的关系是由 B. Maurey 的先驱工作所开创的．他证明了，H^1 空间有无条件基．L. Carleson 之后还有 P. Wojtaszczyk，找出了某些无条件基，可以看到，我们对 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的看法仍然适用于过去的处理方法，这是因为我们用 $f\in L^1$ 和 $\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|U_\omega(f)\|_1<\infty$ 来刻划 H^1，其中 U_ω 是改变小波系数符号的算子．换句话说，$U_\omega(\psi_\lambda)=\omega(\lambda)\psi_\lambda$，而 $\omega(\lambda)=\pm1$．这个算子 $U_\omega(\omega\in\Omega=\{-1, 1\}^\Lambda)$ 是第Ⅶ章的 Calderon－Zygmund 算子．这表明，U_ω 与 R_j 是同一族的．我们刻划 H^1 的方法把这些“创始之父”联系了起来．

在结束文章的述评之前，我们想指出怎样定义周期的 BMO 空间．仅限于一维情形，因为一般情形是类似的．虽然周期为 1 的 L^2_{loc} 函数可以由以周期 1 延拓任一个 $L^2[0,1]$ 的函数而得到，但对 BMO 来说，相应的性质可能不被满足．我们定义周期的 BMO 空间为 BMO($\mathbb{R}$) 的一个子空间，它由周期为1的函数组成．这个子空间并不与周期地延拓 BMO[0, 1]（它是 BMO 函数在 [0, 1] 上的限制）而得到的空间一致．

我们用 $g_0(x)=1$, $g_1(x)$, … 表示第Ⅲ章第 11 节的周期小波. 周期的 BMO 空间是用加在这组基的系数上的 Carleson 条件来刻划的. 即 $\sum_{I(k)\subset I}|\alpha(k)|^2\leqslant C|I|$, 其中当 $k=2^j+r(0\leqslant r<2^j)$时, $I(k)$是区间 $[r2^{-j}, (r+1)2^{-j})$, 而 I是$[0, 1]$中的任一二进区间.

例如, 设 $\sum_0^\infty|\alpha_k|^2<\infty$, $|\alpha_k|$是下降的序列, 则 $\sum_0^\infty\alpha_k g_k(x)$ 属于周期的 BMO. 反之, 若 $\sum_0^\infty|\alpha_k|^2=\infty$, 并且 $|\alpha_k|$下降, 则 $\sum_0^\infty\alpha_k g_k(x)$ 只是一个分布, 而绝不是一个测度.

最后, 我们谈到乘积空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$. 张圣蓉和 R. Feffeman 在他们的一系列重要文章([51], [110], [111])中研究过它们.

部分的 Hilbert 变换 H_1 和 H_2 是分别用乘子 $-i\ \mathrm{sign}\ \xi_1$ 和 $-i\ \mathrm{sign}\ \xi_2$ 定义的, 其中$\xi=(\xi_1, \xi_2)\in\mathbb{R}^2$. 如果四个函数$f$, $H_1(f)$, $H_2(f)$, $H_1H_2(f)$都属于 $L^1(\mathbb{R}^2)$, 则称f 属于乘积空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$.

我们用 $\mathscr{I}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有二进区间的集合, 用 $\psi_I(I\in\mathscr{I})$ 表示由 $r\geqslant 1$ 正则的多分辨率分析得到的 $L^2(\mathbb{R})$ 的小波基.

这时, 函数 $\psi_I\otimes\psi_J$ ($(I, J)\in\mathscr{I}\times\mathscr{I}$) 就构成了乘积空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中的一组无条件基. 确切地说, 用 $\mathscr{R}$ 表示所有二进矩形 $R=I\times J$的集合, 并记 $\psi_R(x, y)=\psi_I(x)\psi_J(y)$. 用这些记号, 级数 $\sum_{R\in\mathscr{R}}\alpha(R)\psi_R$ 属于乘积空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$, 当且仅当 $\left(\sum_{R\in\mathscr{R}}|\alpha(R)|\ |R|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\in L^1(\mathbb{R}^2)$.

类似地, 共轭空间乘积 BMO 是由 "Carleson 条件" $\sum_{R\subset\Omega}|\alpha(R)|^2\leqslant C|\Omega|$ 来刻划的, 它现在应该被 $\mathbb{R}^2$ 上所有开集 Ω 所满足.

这些由 P. G. Lamarié 重新发现的刻划很容易从张圣蓉和 R. Fefferman 的工作得到.

第VI章 小波与函数空间

1. 引 言

在本章中我们将证实，作为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中正交级数的小波级数，对分析许多其它的函数空间仍然是有效的．这些空间诸如：$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$; $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, 其中 s 是用来表示正则性的指标；Hölder 空间；Hardy 空间；Besov 空间等．

这些不同空间的函数(有时可能是缓分布) 可以写成如下形式、在齐次函数空间为

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(f,\ \psi_\lambda)\psi_\lambda(x) \qquad ; \tag{1.1}$$

在非齐次函数空间，就是

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\Gamma_0}(f,\ \varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x)+\sum_{j\geqslant 0}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}(f,\ \psi_\lambda)\psi_\lambda(x). \tag{1.2}$$

在这两种情形，所写出的级数依所考虑的函数所在空间的模无条件地收敛到 $f(x)$.

正如曾经指出过的，证明 Banach 空间 B 的一族向量 $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是一组无条件基，要做如下两个验证，其中一个是直接的，另一个是精巧的．

(a) $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 构成了 B 的全体(也说是完备的)，即 e_λ 的线性组合构成了 B 的稠密子空间；

(b) 存在常数 $C\geqslant 1$, 使得对所有满足 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}|m_\lambda|\leqslant 1$ 的序列 $m_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, 存在算子 T（事实上，由于 (a)，它还是唯

一的)在 B 上连续，模 $\|T\| \leqslant C$，并且 $T(e_\lambda)=m_\lambda e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$.

要验证的算子 T 实际上是 Calderon－Zygmund 算子．这个算子在所考虑空间上的连续性将用第Ⅶ章的实变方法或第Ⅷ章介绍的 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理得到．这样，我们没有按逻辑的次序来叙述．这点请读者原谅．我们打算把本书的前六章全部用于讨论小波，而尽可能少地谈到算子，以便有更多的人阅读前六章．

本章一开始，就讨论用小波级数给出 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 的刻划．这个刻划自然地扩张了已经得到的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的刻划，但显然不能用于 L^1 与 L^∞ 空间 (它们没有无条件基)．在一定意义上，小波对求导和积分是稳定的．因此当 $|s|$ 不超过小波的正则性指标 r 时，得到空间 $L^{p,s}$ 的刻划就不足为怪，其中 $L^{p,s}$ 是 L^p 中函数的分数次积分或微分．

接着，我们讨论 $0<p<1$ 时的 Hardy 空间 H^p.

本章第二部分讨论人们已经多少知道一些的 Besov 空间．它们也是用加在小波系数模上的很简单的条件来刻划的．

本章最后一部分讨论 Banach 空间理论中的两个经典问题 (圆盘代数的 Schauder 基和全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^1$ 的无条件基)．这里，用小波理论可以得到一个优美的新解答．

2. 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 及属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ 的判别法

在整个这节中，设 $1<p<\infty$．我们必须排除极端情形 $p=1$ 和 $p=\infty$.

让我们回忆一下：Λ 是 $\lambda=2^{-j}k+2^{-j-1}\varepsilon$ 的集合，其中 $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in E$, E 是集合 $\{0, 1\}^n$，但要除去 $(0, 0, \cdots, 0)$．请注意，j, k, ε 是以唯一方式被 λ 确定的．用 $Q(\lambda)$ 表示由 $2^jx-k\in[0, 1)^n$ 定义的二进方体，而 $\chi_\lambda(x)$ 是 $Q(\lambda)$ 的特征函数，$Q(\lambda)$ 的体积记为 $|Q(\lambda)|$.

最后，$\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 r 正则多分辨率分析得到的一组小波基.

定理 1 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 $(1<p<\infty)$，下面三个模是等价的.

(1) $\|f\|_p$；

(2) $\left\|\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ |Q(\lambda)|^{-1}\chi_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$；

(3) $\left\|\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ |\psi_\lambda(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$.

此外，一个小波级数属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$，当且仅当后两个模之一为有限.

先验证第一个模与第三个模等价.

为此，设 Ω 是乘积集合 $\{-1, 1\}^\Lambda$，我们赋予它一个 Bernoulli 概率测度 $d\mu(\omega)$，这个测度是每个因子在 -1 和 1 处有质量 $\dfrac{1}{2}$ 的测度的乘积. 因此 Ω 的元 ω 就是一个由 ± 1 组成的序列 $\omega(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$.

对任意 $\omega\in\Omega$，用 T_ω: $L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 表示由 $T_\omega(\psi_\lambda)=\omega(\lambda)\psi_\lambda$ 定义的算子.

引理 1 $T_\omega(\omega\in\Omega)$ 的集合是 Calderon－Zygmund 算子的一个有界集合.

由于 T_ω 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的保范变换，又对 $\omega\in\Omega$，核 $K_\omega(x, y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega(\lambda)\psi_\lambda(x)\bar{\psi}_\lambda(y)$ 一致地满足

$$|K_\omega(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n},$$

$$|\partial K_\omega/\partial x_j|+|\partial K_\omega/\partial y_j|\leqslant C|x-y|^{-n-1},$$

这个引理是显然的.

我们要用的第二个引理是著名的 Khintchine 不等式（[239]）.

引理 2 在由函数 $S(\omega)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\omega(\lambda)$ 组成的 $L^2(\Omega)$ 的闭子空间上，所有的"L^p $(\Omega,\ d\mu(\omega))$ 模" $(0<p<\infty)$ 都是彼此等价的. 即存在两个常数 $C_p\geqslant C'_p>0$, 使得

$$C'_p\left(\sum|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_\Omega|S(\omega)|^p\ d\mu(\omega)\right)^{1/p}\leqslant C_p\left(\sum|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}.$$

我们由此来证明定理 1 的模等价性. 由 Calderon－Zygmund 理论，有 $\|T_\omega(f)\|_p\leqslant C\|f\|_p$ 成立. 把这个不等式两端 p 次方后，对 $\omega\in\Omega$ 取平均，便得到在 $\mathbb{R}^n\times\Omega$ 上带有测度 $dxd\mu(\omega)$ 的二重积分. 再用 Fubini 定理和 Khintchine 不等式，就有

$$\left\|\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ |\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant C'\|f\|_p. \tag{2.1}$$

为得到反向的不等式，在 (2.1) 左边取 p 次幂，把所得的积分记为 $N_p(f)$, 使用 Khintchine 不等式的第二部分，该积分就控制了 $C_p^{-p}\int_\Omega\|T_\omega(f)\|_p^p\ d\mu(\omega)$. 最后，注意到 $T_\omega^2=I$, 知 $\|f\|_p\leqslant C\|T_\omega(f)\|_p$ $(\forall\omega\in\Omega)$. 因此 $\|f\|_p\leqslant C'(N_p(f))^{\frac{1}{p}}$.

为了证明 $\|f\|_p$ 与 $\left\|\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ |Q(\lambda)|^{-1}\chi_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$ 的等价性，由已经得到的等价性，使用第Ⅲ章第 8 节的紧支小波.

设 m 是一个整数，使得每个 ψ_λ 的支集包含在方体 $mQ(\lambda)$ 中（它与 $Q(\lambda)$ 有相同的中心，但边长是 $\lambda(Q)$ 边长的 m 倍）.

记 n 维 Haar 系为 $h_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, 则 $|h_\lambda|=|Q(\lambda)|^{-\frac{1}{2}}\chi_\lambda$, 并且 h_λ 在对

$Q(\lambda)$ 进行子分划所得的 2^n 个小二进方体中的每一个上取常数.

我们定义酉算子 U: $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 为 $U(h_\lambda)=\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$.

引理 3 若 $1<p<\infty$, 则算子 U 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的同构.

这个引理再加上定理 1 中对模的概率解释，就完成了定理的证明.

为证明引理 3, 我们指出，U 是二进 H^1 空间与经典的 H^1 空间的同构，同样地，U 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的保范变换. 由插值定理，U 与 U^{-1} 当 $1<p<2$ 时在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的. 这里用到了 H^1 与 L^2 之间的插值定理，读者可以在〔109〕中找到它.

但我们也可以用另一个插值定理来证明 U 与 U^{-1} 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的，其中 $1<p<2$. 这就是 Marcinkiewicz 插值定理 (〔217〕), 即已知 U 与 U^{-1} 是从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到弱 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界的. 建议读者参阅下一章第 3 节，那里将介绍我们所用的这一方法.

由第Ⅶ章第 3 节直接可得 U 与 U^{-1} 从 L^1 到弱 L^1 的连续性. 事实上，U^{-1} 的核是 $\sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(x)\overline{\psi}_\lambda(y)$, 而它对 y 的正则性是由小波的正则性保证的.

由于 U 的核 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda(x)h_\lambda(y)$ 对 y 没有正则性，U: $L^1 \to$ 弱 L^1 的连续性似乎有问题.

但是这个困难仅仅是表面的. 为了证明 U 的弱连续性，设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 对它在水平 $t>0$ 上做 Calderon－Zygmund 分解. 我们得到坏函数 $b(x)$, 它是支在二进方体 Q_j 上的一个个 $b_j(x)$ 的和；此外，$b_j(x)$ 在 Q_j 上的积分为零，并且 $\sum|Q_j|\leqslant \frac{C}{t}\|f\|_1$. 因此，当 $x\notin mQ_j$ 时，有

$$U(b_j)(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda(x)\int_{Q_j}h_\lambda(y)b_j(y)dy=0. \tag{2.2}$$

事实上，要使积分不等于零，h_λ 的支集 $Q(\lambda)$ 就应与 Q_j 相交．然而两个二进方体相交，只能是一个包含另一个．如果 $Q(\lambda)\subset Q_j$，那么 Suup $\psi_\lambda\subset mQ_j$，并且当 $x\notin mQ_j$ 时 $\psi_\lambda(x)$ 等于零．如果 $Q_j\subset Q(\lambda)$ 并且 $Q_j\neq Q(\lambda)$，那么 Q_j 就包含在 $Q(\lambda)$ 子分划的一个方体中．因此，h_λ 在 Q_j 上是常数．故 $\int_{Q_j}h_\lambda(y)b_j(y)dy=0$.

我们还是使用第Ⅶ 章第 3 节的方法与记号，由等式 (2.2) 就得到了算子 U 的 (L^1, 弱 L^1) 连续性．由于不用 Marcinkiewicz 函数，这比通常情形的证明更容易．

因为 U 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉算子，所以它的共轭就是它的逆．这样，$2\leqslant p<\infty$ 的情形就可从 $1<p\leqslant 2$ 的情形推出．

现在来考虑一般的 Sobolev 空间 $L^{p,s}$(也记为 $W^{s,p}$)，我们将定义它们．先考虑 $1<p<\infty$ 及 $0\leqslant s<r$ 的情形，其中 r 是小波的正则性指标．然后考虑 $-r<s<0$ 的情形．最后讨论相应的齐次空间的情形．

当 $1<p<\infty$, $s\geqslant 0$(s 是个实数) 时，$L^{p,s}$ 是 L^p 的一个子空间，它由 $(I-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 的函数组成，其中算子的作用是在分布意义上取的．换言之,存在函数 $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 满足 $\hat{g}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\xi)$.
我们假设由多分辨率分析得到的小波是 r 正则的，而 $r\geqslant s$.

这样，有判别属于 $L^{p,s}$ 的充分必要条件．

命题 1　小波级数属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty,\ 0\leqslant s\leqslant r)$，当且仅当

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2(1+4^{js})2^{nj}\chi_\lambda(x)\right)^{1/2}\in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

先对 Littlewood－Paley 多分辨率分析(第Ⅲ 章第 2 节)的情形证明这个结果，然后指出在一般情形所要做的改动.

在 Littlewood－Paley 多分辨率分析中，对 $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in E$, 有 $\psi_\lambda(x)=2^{nj/2}\psi^\varepsilon(2^jx-k)$, 并且这 2^n-1 个函数 ψ^ε 属于 Schwartz 函数类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 此外，Fourier 变换 $\hat{\psi}^\varepsilon(\xi)$ 有紧支集并且在 0 的邻域为零. 对任意 $\gamma\in\mathbb{R}$, 可以构造函数 $\psi^{\varepsilon,\gamma}$, 即设 $\psi^{\varepsilon,\gamma}=(-\Delta)^{\gamma/2}\psi^\varepsilon$. 用 Fourier 变换表示，就是 $\hat{\psi}^{\varepsilon,\gamma}(\xi)=|\xi|^\gamma\hat{\psi}^\varepsilon(\xi)$.

一旦 $\psi^{\varepsilon,\gamma}$ 造出来，我们就用

$$\psi_\lambda^\gamma(x)=2^{nj/2}\psi^{\varepsilon,\gamma}(2^jx-k),(\lambda=2^{-j}k+2^{-j-1}\varepsilon) \tag{2.4}$$

定义函数族 $\psi_\lambda^\gamma(x)$.

用 $\mathscr{L}_\gamma$ 表示由 $\mathscr{L}_\gamma(\psi_\lambda)=\psi_\lambda^\gamma$ 所定义的算子. 为了证明命题 1, 我们先来建立以下的结果.

命题 2 对任意的 $\gamma\in\mathbb{R}$, 算子 $\mathscr{L}_\gamma$ 在 $1<p<\infty$ 时，是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到自身的同构.

特别地，为计算级数 $\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda^\gamma(x)$ 的 L^p 模，只要根据定理 1 对 $\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 作相应的估计.

现在来证明，命题 2 蕴含着命题 1. 首先看到：如果 $f\in L^{p,s}$ $(s\geqslant 0)$, 那么 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f$ 有意义，并且它属于 L^p, 而且 f 的 $L^{p,s}$模等价于 $\|f\|_p+\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_p$.

为说明这一点，我们作 Fourier 变换. 由以下观察得到: $1-|\xi|^s(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ 是函数$g_s\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换. 这正是我们要说明的.

为了估计 $\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 的 $L^{p,s}$ 模，最好来计算 $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}\cdot\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)=\sum\alpha(\lambda)2^{js}\psi_\lambda(x)$ 的 L^p 模. 这个等式可以从 ψ_λ^s 的定义得

到．于是用命题 2 就得到了命题 1.

首先在 $p=2$ 时证明命题 2，并且得到 $\mathscr{L}_\gamma$ 的逆算子 M_γ 的显式．先建立下面的引理．

引理 4 对所有的 $\gamma\in\mathbb{R}$，函数 $\psi_\lambda^\gamma(x)$ 构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一组 Riesz 基，并且共轭基是 $\psi_\lambda^{-\gamma}$ $(\lambda\in\Lambda)$.

为证明引理 4，我们使用将在第Ⅷ章第 3 节得到的结果，从该结果知道：

$$\left\|\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda^\gamma(x)\right\|_2\leqslant C(\gamma)\left(\sum|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

这个不等式表明，函数族 ψ_λ^γ $(\lambda\in\Lambda)$ 是几乎正交的．这个正交性是从函数 ψ_λ^γ 的构造，即从函数 ψ_λ^γ 的局部性，正则性及相消性得到的(见第Ⅷ章定义 3 和定理 2)．

一旦有了 (2.5) 式，注意到 $\psi_\lambda^\gamma=2^{-j\gamma}(-\Delta)^{\gamma/2}\psi_\lambda$，就得到：当 $\lambda\neq\lambda'$ 时，$(\psi_\lambda^\gamma,\ \psi_{\lambda'}^{-\gamma})=0$；而当 $\lambda=\lambda'$ 时，它等于 1．因为当用 $-\gamma$ 代替 γ 时，(2.5) 也成立，可以立即就有反向的不等式，即

$$\left\|\sum\gamma(\lambda)\psi_\lambda^\gamma(x)\right\|_2\geqslant\delta(\gamma)\left(\sum|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}.$$

最后，应该说明，函数 ψ_λ^γ 构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的全体．设函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 与所有这些 ψ_λ^γ 正交，则对任意 $\lambda\in\Lambda$，$(f,\ (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\psi_\lambda)=0$. 引入分布 $S=(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}f$ 来改写上式．这个分布属于 Sobolev 空间 $H^{-\gamma}$，并且满足 $\langle S,\ \psi_\lambda\rangle=0(\lambda\in\Lambda)$，其中 $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle$ 表示分布与试验函数之间共轭性的双线性形式，同时也使用了 ψ_λ 是实值的事实．由 Sobolev 空间的小波刻划，得到 $S=0$．引理 4 证毕．

引理 4 的意义是：算子 $\mathscr{L}_\gamma$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的同构．$\mathscr{L}_\gamma$ 的分布核是 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda^\gamma(x)\overline{\psi}_\lambda(y)$，它在开集 $\Omega=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{x\neq y\}$ 上的限制满足第Ⅶ章的 Calderon－Zygmund 估计．因此，$\mathscr{L}_\gamma$ 可以延拓成 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的连续算子 $(1<p<\infty)$．下面考虑由 $\mathscr{M}_\gamma(\psi_\lambda^\gamma)=\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 定义的算子 $\mathscr{M}_\gamma$．它的分布核是 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda(x)\overline{\psi}_\lambda^{(-\gamma)}(y)$．完全与 $\mathscr{L}_\gamma$ 相同，$\mathscr{M}_\gamma$ 也可以延拓在整个 L^p 空间上的连续算子 h．最后因为紧支集的连续函数(属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$)在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，所以在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有 $\mathscr{L}_\gamma\mathscr{M}_\gamma=\mathscr{M}_\gamma\mathscr{L}_\gamma=I$．命题 2 就全部证完了．

现在我们过渡到一般的由 $r\geqslant 1$ 正则多分辨率分析得到的小波的情形．要改写上述证明，以控制函数 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\psi^\varepsilon$ 和 $(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}\psi^\varepsilon$ 的正则性、无穷远处的速降性以及振动性，其中 ψ^ε 是构成正交基的一组小波．

我们将使用第Ⅱ章引理 12 的记号和结果．特别是，用 $\mathscr{S}_r$ 表示不超过 r 阶的导数都在无穷远处速降的函数的集合．因为当 $|\alpha|\leqslant r$ 时，各阶矩 $\int x^\alpha\psi^\varepsilon(x)dx$ 都是零，故

$$\psi^\varepsilon(x)=\sum_{|\alpha|=r}\partial^\alpha\psi_\alpha^\varepsilon(x), \tag{2.6}$$

其中

$$\psi_\alpha^\varepsilon(x)\in\mathscr{S}_r \quad 并且 \int\psi_\alpha^\varepsilon(x)dx=0.$$

可以用这个等式处理 $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}\psi^\varepsilon$．事实上，使用 Fourier 变换后，就化为分析 $|\xi|^{-s}\hat{\psi}^\varepsilon(\xi)$ 了．把 1 写成 $1=\psi_0(\xi)+\varphi_1(\xi)$，其中 φ_0 是一个无穷次可微的、紧支的、并且在原点的邻域内等

于 1 的函数．这时，对所有的 $s>0$, $|\xi|^{-s}\varphi_1(\xi)$ 是一个在无穷远处速降的可积函数 $K(x)$ 的 Fourier 变换．与 $K(x)$ 作卷积，$\mathscr{S}_r$ 类不变．为处理 $|\xi|^{-s}\varphi_0(\xi)\hat{\psi}^\varepsilon(\xi)$, 我们使用 (2.6)．这就归结为讨论 $\xi^\alpha|\xi|^{-s}\varphi_0(\xi)\hat{\psi}^\varepsilon_\alpha(\xi)$. 由于 $|\alpha|=r>s$, 所以出现的项都是这样的函数的Fourier 变换，它们本身及其导数都是无穷次可微的，并且在无穷远处为 $O(|x|^{-n-r+s})$.

总之，$(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}\psi^\varepsilon$ 是一个不超过 r 阶的所有导数都是 $O(|x|^{-n-r+s})$ 的并且积分值为零的函数．

类似的推理可以用于 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\psi^\varepsilon$. 这时当 s 变大时，正则性降低．我们得到一个积分值为零的在无穷远处为 $O(|x|^{-n-r+s})$ 的 $r-s$ 阶 Hölder 函数．

使用在 Littlewood－Paley 多分辨率分析的情形用过的推理，就在 $0\leqslant s<r$ 的情形，得到了同样的结论．

现在来讨论 $-r<s<0$ 的情形．我们先定义 $s<0$ 时的空间 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$. 与通常的 Sobolev 空间的情形相同，可以用 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)=(I-\Delta)^{\frac{s}{2}}L^p(\mathbb{R}^n)$ 定义．但也可以定义 $L^{p,s}$ 为 $L^{q,-s}$ 的共轭空间，其中 q 是共轭指标 $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，并且我们认为前一个空间是一个分布的空间，而后一个空间是相应的试验函数空间．

我们打算证明下面的结果．

命题 3 一个小波级数属于 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty,\ -r<s\leqslant 0)$, 当且仅当

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ 2^{nj}(4^{-js}+1)^{-1}\chi_\lambda(x)\right)^{1/2}\in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

这里给出的刻划显然是命题 1 给出的刻划的共轭．我们来说

明它．设 E 是一个自反的 Banach 空间，设 $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是 E 的一组无条件基．则共轭基 $e_\lambda^*=f_\lambda\,(\lambda\in\Lambda)$ 是 E 的共轭空间 E^* 的一组无条件件基，该共轭基由 $f_\lambda(e_{\lambda'})=\delta_{\lambda,\lambda'}$ 来定义．

级数 $\sum\alpha(\lambda)e_\lambda\in E$ 具有可以用它的系数的模 $|\alpha(\lambda)|$ 来刻划的性质．因此，级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\beta(\lambda)f_\lambda\in E^*$ 也仅仅依赖于模 $|\beta(\lambda)|$；事实上，该序列可以这样来刻划：当 $\sum\alpha(\lambda)e_\lambda\in E$ 时，级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|\cdot|\beta(\lambda)|$ 收敛．

在我们所讨论的情形中，$E=L^{q,-s}$, $E^*=L^{p,s}$, 并且 E 与 E^* 的共轭性是由试验函数与分布之间的共轭性导出的．因此，ψ_λ $(\lambda\in\Lambda)$ 的共轭基就是它本身．由以下引理就证明了命题 3.

引理 5 设 $p\in(1,\infty)$, q 是 p 的共轭指标．用 $\omega(\lambda)$ 表示一个严格正的数列．设 E 是所有使 $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\omega(\lambda)2^{nj}\chi_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}}$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的序列$\alpha(\lambda)$ 构成的 Banach 空间,其中 $\alpha(\lambda)$ 在E中的模就用 L^p 模定义．则 E 的共轭 E^* 是所有使得$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\beta(\lambda)|^2\omega^{-1}(\lambda)2^{nj}\chi_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}}$ 属于 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的序列 $\beta(\lambda)$ 组成的 Banach 空间．而这两个序列空间的共轭性由 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\beta(\lambda)$ 给出．

我们来说明它．把序列 $\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ 与辅助函数 $f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\cdot\omega^{\frac{1}{2}}(\lambda)\psi_\lambda(x)$联系起来；同样，把序列 $\beta(\lambda)$ 与 $g(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\beta(\lambda)\omega^{-\frac{1}{2}}(\lambda)\cdot\psi_\lambda(x)$ 联系起来．则 $\int f\bar{g}=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\bar{\beta}(\lambda)$. $\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ 在E中的

模等价于 f 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的模，这个等价性是由定理 1 提供的．最后，从L^p 与 L^q 的共轭性就推出了这个引理．

我们暂时停下来，对命题 1 和命题 3 作些发挥．小波构成了所有满足 $1<p<\infty$ 并且 $|s|<r$ 的空间 $L^{p,s}$ 的一组无条件基．

此外，若 $0<s<r$，设 f 是 $L^{p,s}$ 的一个函数，S 是共轭空间 $L^{q,-s}$ 的一个分布；则这个分布与这个试验函数之间的共轭性可以写成一个绝对收敛级数的形式：$<S, \bar{f}>=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\bar{\beta}(\lambda)$，其中 $\alpha(\lambda)$ 是 S 的小波系数，而 $\beta(\lambda)$ 是 f 的小波系数．

而使用 Fourier 级数，这些性质根本不存在．若 p，q 是共轭指标，并且$1<p<2<q<\infty$，尽管当 $f\in L^p[0, 2\pi]$，$g\in L^q[0, 2\pi]$ 时有 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\bar{g}(x)dx=\sum_{-\infty}^{\infty}a_k\bar{b}_k$，但右边的级数(一般)不是绝对收敛的(只知当$m$趋于无穷时，部分和 $\sum_{-m}^{m}a_k\bar{b}_k$ 收敛到$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}dx$)．

言归正传，让我们用小波级数来分析 $L^{p,s}$ 的函数．这次，使用由函数 $\varphi(x-\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{Z}^n)$ 和 $\psi_\lambda(x)$ $(\lambda\in\Lambda_j, j\geqslant 0)$ 构成的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交基．

即我们想通过表达式

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_n}\beta(\lambda)\varphi(x-\lambda)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \tag{2.8}$$

得到 $f\in L^{p,s}$ 的系数 $\beta(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{Z})$ 和 $\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda_j, j\geqslant 0)$ 刻划．

下面的定理给出了这个刻划．

定理 2　级数(2.8)属于 $L^{p,s}(1<p<\infty, |s|<r)$，当且仅当序列 $\beta(\lambda)\in l^p(\mathbb{Z}^n)$，且

$$\left(\sum_{0}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}2^{nj}4^{js}|\alpha(\lambda)|^2\ \chi_\lambda(x)\right)^{1/2}\in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

可以把(2.9)解释为：一个局部的条件及一个对局部模在无穷远处所加的条件．事实上，$f(x)\in L^{p,s}$，当且仅当在网点 $\mathbb{Z}^n$ 的点 k 附近，f 被一个适当的函数 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 所局部化，这些被局部化了的函数 $f(x)\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 都属于 $L^{p,s}$，并且它们的 $L^{p,s}$ 模的序列属于 $l^p(\mathbb{Z}^n)$.

为了说明这点，设 $\mathscr{Q}_0$ 为所有边长为 1 的二进方体的集合．那么边长为 $2^j\leqslant 1$ 的二进方体 $Q\in\mathscr{Q}_j$ 就包含在某一个并且仅包含在一个 $R\in\mathscr{Q}_0$ 中；同样，所有的 $\lambda=k2^{-j}+\varepsilon 2^{-j-1}(k\in\mathbb{Z},\ j\geqslant 0,\ \varepsilon\in E)$属于某个并且仅属于一个 R. 这样，(2.9) 左边级数的项 $4^{js}2^{nj}|\alpha(\lambda)|^2\chi_\lambda(x)$ 就分组了，它们形成了 $\sum_{R\in\mathscr{Q}_0}\omega_R^2(x)$，其中 $\omega_R(x)\geqslant 0$，并且 ω_R 的支集包含在方体 R 中．

我们用 $\sigma_R(x)$ 表示所研究的小波级数的部分和 $\sum_{Q(\lambda)\subset R}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$，$\sigma_R$ 就构成了整个级数 $f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda\psi_\lambda(x)$ 在 R 附近的局部化．$\sigma_R(x)$ 的 $L^{p,s}$ 模等价于 ω_R 的 L^p 模；最后，f 的 $L^{p,s}$ 模等价于局部化模 $\|\sigma_R\|_{L^{p,s}}$ 的 $l^p(\mathbb{Z}^n)$ 模．

由于(2.8)右边级数是这样得到的，即从 f 出发，用小波级数去分解，再对指标 $j<0$ 求部分和；定理 2 的证明就是显然的了．这只需使用命题 1 或命题 3.

现在叙述定理 2 的一个推论，它是用于**量子场论**的计算的．当 $f(x)$ 是由 (2.8) 给出时，我们要计算 $\|(-\Delta+I)^{-\frac{1}{2}}f\|_4$．然而，这个原函数的 L^4 模不是别的，正是 f 的 $L^{4,-1}$ 模．使用(2.9)，则所求的模就等价于 $\beta(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{Z})$ 的 l^4 模与

$$\left(\int_{R^n}\left(\sum_{0}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}2^{(n-2)j}|\alpha(\lambda)|^2\,\chi_\lambda(x)\right)^2 dx\right)^{1/4}$$

的和.

展开平方项，得到“正方”项与“矩形”项，“正方”项是

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}2^{(n-4)j}|\alpha(\lambda)|^4\quad;$$

“矩形”项是

$$\sum_{\lambda'<\lambda}\sum 2^{(n-2)j}2^{-2j'}|\alpha(\lambda)|^2\;|\alpha(\lambda')|^2\quad,$$

其中 $\lambda'<\lambda$ 表示 $Q(\lambda')\subset Q(\lambda)$, $Q(\lambda)$ 是由 $2^jx-k\in[0,1)^n$ 定义的方体，而 $\lambda=2^{-j}k+2^{-j-1}\varepsilon$ $(\varepsilon\in E)$.

在结束空间 $L^{p,s}$ 的讨论之前，对相应的齐次空间略作说明是合适的. 记得 f 的 $L^{p,s}$ 模是用 $\|(I-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_p$ 定义的. 对在平移和展缩下不变的函数空间 E, 而 E 又满足连续包含关系 $\mathscr{S}\subset E\subset\mathscr{S}'$, 我们用解决以下问题来定义相应的齐次空间. 这个问题就是确定实指标 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使得在 E 的一个稠密向量子空间上，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^{-\alpha}\|f(\lambda x)\|_E$ 存在. 按定义，这个极限就是 f 在与 E 相关的齐次空间上的模.

空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 是齐次的: L^p 模是平移不变的，并且指标 α 取值 $-\dfrac{n}{p}$. 然而，空间 $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ $(s\in\mathbb{R})$ 不是齐次的. 若 f 属于由 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中所有矩都是零的函数组成的子空间 $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, 则当 λ 趋于无穷时，$\|f(\lambda x)\|_{L^{p,s}}$ 就等价于 $\lambda^{s-\frac{n}{p}}N_{p,s}(f)$, 其中 $N_{p,s}(f)=\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_p$. 由 Fourier 变换可以看出，$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_p$ 是有意义的. 事实上，$\mathscr{F}((-\Delta)^{\frac{s}{2}}f)=|\xi|^s\hat{f}(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 它的各阶导数在 0 点都是 0.

因此，$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$，它的 L^p 模是有限的.

相应于空间 $L^{p,s}$ 的齐次空间记为 $\dot{L}^{p,s}$，它形式上是由在 $L^{p,s}$ 的定义 $\|(I-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p<\infty$ 中仅保留条件 $N_{p,s}(f)=\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p<\infty$ 来定义的. 但是我们不希望齐次空间 $\dot{L}^{p,s}$ 是所有使 $N_{p,s}(f)$ 为有限的函数 f 的集合. 例如，当 $0<s<\frac{n}{p}$ 时，我们不想让函数 1 属于 $\dot{L}^{p,s}$，尽管当 $s=2$ 时，显然有 $\Delta(1)=0$.

为定义 $\dot{L}^{p,s}$，用 q 表示由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 决定的共轭指标，我们区分三种情形：$-\frac{n}{q}<s<\frac{n}{p}$，$s\leqslant-\frac{n}{q}$ 及 $s\geqslant\frac{n}{p}$.

在第一种情形，定义 $\dot{L}^{p,s}$ 为 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，在模 $N_{p,s}$ 下的完备化. 这时，问题在于知道，这个抽象的完备空间是否是一个函数空间，或等价地，是否一个试验函数列依 $N_{p,s}$ 模收敛蕴含着它在分布意义上收敛. 容易验证，这是正确的. 值得注意的是，当 $s\geqslant\frac{n}{p}$ 时，就不是这样了. 例如，如果 $s>\frac{n}{p}$，设 λ 趋向于无穷，对任意试验函数 φ，$\varphi(\lambda^{-1}x)$ 的模 $N_{p,s}(\varphi)$ 趋向于 0，但在分布意义上，这同一个函数列却趋向于 $\varphi(0)$.

我们来考虑第二种情形 $s\leqslant-\frac{n}{q}$.

这与第一种情形的差别是：如果试验函数 φ 的积分值不是零，则 $N_{p,s}(\varphi)=+\infty$.

因此，从空间 $\mathscr{S}_0\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 出发，它由各阶矩均为零的函数 φ 组成，并把它用模 $N_{p,s}$ 完备化. 用下面的方法亦可得到同样的结果：逐次定义一个整数，使它满足 $-\frac{n}{q}-m-1<s\leqslant-\frac{m}{q}-m$，然后定义 $\mathscr{D}_m$ 为 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中满足 $\int x^\alpha\varphi(x)dx=0$ $(|\alpha|<m)$ 的函数 φ 组

成的空间，最后定义 $\dot{L}^{p,s}$ 为 $\mathscr{D}_m$ 在模 $N_{p,s}$ 下的完备化．此外，$\dot{L}^{p,s}$ 还是缓分布的空间．

最后考虑 $s \geqslant \frac{n}{p}$ 的情形．我们使用 $L^{p,s}$ 与 $L^{p',s'}$ 之间的共轭性，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，$s'=-s$，$-\frac{n}{q}<s<\frac{n}{q}$，$-\frac{n}{q'}<s'<\frac{n}{q'}$ (注意：$p'=q$ 与 $q'=p$ 这两个条件是相同的)．因此，当 $s \geqslant \frac{n}{p}$ 时，我们通过延拓这个共轭性来定义空间 $\dot{L}^{p,s}$.

用 $\frac{n}{p}+m \leqslant s<\frac{n}{p}+m+1$ 决定一个整数 $m \in \mathbb{N}$．然后定义 $\dot{L}^{p,s}$ 为带有 $L^{p',s'}$ 模的 $\mathscr{D}_m$ 的共轭空间(p', s' 是 p 与 s 的共轭数)．由此得出，$\dot{L}^{p,s}$ 是模掉次数 $\leqslant m$ 的多项式的分布的空间，它不再是函数空间了．

回到用小波系数的模去刻划经典函数空间的方法．设 $r \geqslant 1$ 是一个整数，$\psi_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 是一组由 r 正则多分辨率分析得到的小波正交基．为了能用小波系数的模刻划空间 $\dot{L}^{p,s}$，首先必须有：小波能够充当分析分布 $S \in \dot{L}^{p,s}$ 的试验函数．当 $r>|s|$ 时，这个条件一定满足，我们就是这样假设的．下面应该避免让函数 1 属于所有的空间 $\dot{L}^{p,s}$，理由是 1 的所有小波系数都是零．避免这第二个陷井的方法是假设 $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 实际上是一个小于 r 阶的分布，并假设当 $s<\frac{n}{p}$ 时，S 的小波级数在分布意义上收敛于 S；而当 $m+\frac{n}{p} \leqslant s<\frac{n}{p}+m+1$ 时，要假设 S 的小波级数在模掉次数小于等于 m 的多项式的分布的商空间上趋向于 S.

有些事先说明，我们就可以逐字逐句地重复定理 2 的证明，从而得到下面的

定理 3　若 $1<p<\infty$，$-r<s<r$，则 $S\in\dot{L}^{p,s}$，当且仅当它的小波系数 $\alpha(\lambda)$ 满足

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ 2^{nj}4^{sj}\chi_\lambda(x)\right)^{1/2}\in L^p(\mathbb{R}^n),\tag{2.10}$$

其中，$\chi_\lambda(x)$ 是方体 $Q(\lambda)$ 的特征函数.

我们将用这种刻划推导出 Sobolev 的两个包含关系：

(1) 若 $s>\frac{n}{p}$，而 $r=s-\frac{n}{p}$，则 $\dot{L}^{p,s}\subset\dot{C}^r$，其中 $\dot{C}^r$ 是齐次 Hölder 空间(稍后，我们将系统地定义并讨论它们)；

(2.11)

(2) 若 $s=\frac{n}{p}$，则 $\dot{L}^{p,s}\subset$ BMO. (2.12)

为了证明 (2.11)，在 (2.10) 中任意抽出一项，则 L^p 模将减少，由此得到 $|\alpha(\lambda)|\leqslant C2^{-nj/2}\ 2^{-rj}\|f\|_{p,s}$. 这正是空间 $\dot{C}^r$ 的特征.

为了证明 (2.12)，我们要区分 $2\leqslant p<\infty$ 和 $1<p\leqslant 2$ 两种情形.

在第一种情形，用 $g(x)$ 表示 (2.10) 的左边，则对所有边长为 2^{-j_0} 的二进方体 Q，有

$$\int_Q g^2(x)dx\leqslant\left(\int_Q g^p(x)dx\right)^{2/p}\left(\int_Q 1\ dx\right)^{1/r},$$

其中 $\frac{2}{p}+\frac{1}{r}=1$. 展开 $\int_Q g^2(x)dx$，当 $|Q|^{\frac{1}{r}}=|Q|4^{j_0s}$ 时，我们精确地得到 $\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|\alpha(\lambda)|^2\ 4^{js}$. 因此，

$$\sum_{Q(\lambda)\subset Q}|\alpha(\lambda)|^2 4^{js}\leqslant C|Q|4^{j_0 s},$$

它比 Carleson 条件精确得多.

最后，考虑 $s=\frac{n}{p}$ 且 $1<p\leqslant 2$ 的情形. 我们使用反向的 Minkowski 不等式，即当 $0<\beta\leqslant 1$ 且 $f_\lambda(x)\geqslant 0$ 时，有

$$\left\|\sum f_\lambda(x)\right\|_\beta \geqslant \sum_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_\beta ,$$

其中 $\|f\|_\beta=\left(\int |f(x)|^\beta\, dx\right)^{1/\beta}$.

对 $\beta=\frac{p}{2}$，$f_\lambda(x)=|\alpha(\lambda)|^2\ 2^{nj}4^{js}\chi_\lambda(x)$ 应用这个不等式，就得到

$$\left(\int_{R^n} g^p(x)dx\right)^{2/p}=\left(\int_{R^n}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ 2^{nj}4^{js}\chi_\lambda(x)\right)^{p/2}dx\right)^{2/p}$$

$$\geqslant\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|^2\ 2^{nj}.$$

我们刚刚证完了 Sobolev 的包含关系 $\dot{L}^{p,s}\subset\dot{L}^{2,n/2}$，而后一个空间包含在 BMO 中，因为这属于第一种情形.

3. 当 $0<p\leqslant 1$ 时的 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$

按照〔75〕中所采用的观点，我们用原子分解的方法定义 Hardy 空间 $H^p(p\leqslant 1)$.

$H^p(\mathbb{R}^n)$ $(0<p\leqslant 1)$ 定义为具有如下性质的缓分布 S 的向量空间，其中 S 可以写成

$$S=\sum_0^\infty \lambda_k a_k(x) , \tag{3.1}$$

而 $a_k(x)$ 是 p 原子，并且 $\sum_0^\infty|\lambda_k|^p<\infty$.

p 原子 $a_k(x)$ 的定义是：对每个原子 $a_k(x)$，存在体积为 $|B_k|$ 的球 B_k，使得每个 $a_k(x)$ 的支集包含在 B_k 中，并且

$$\|a_k\|_\infty\leqslant|B_k|^{-1/p} \text{ 和 } \int a_k(x)x^\alpha dx=0 \tag{3.2}$$

对所有满足 $|\alpha|\leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)$ 的多重指标 α 成立.

在这些条件下，(3.1)按分布意义收敛.

更确切地说，如果 $f(x)$ 是指数为 $\gamma=n\left(\frac{1}{p}-1\right)$ 的 Hölder 函数 $(0<p<1)$，则级数 $\sum_0^\infty\lambda_k<f,\ a_k>$ 绝对收敛. 加在 f 上的条件是它属于齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^\gamma$；当 $0<\gamma<1$ 时，这是通常的空间；当 $\gamma=1$ 时，它是 Zygmund 类，当 $\gamma>1$ 时，它是由 $f\in\dot{C}^\gamma\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x_j}\in\dot{C}^{\gamma-1}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 定义的.

从下面的引理就得到了级数的收敛性.

引理 6 若 $f\in\dot{C}^\gamma$，而函数 $a(x)$ 支在半径为 R 的球上，并且满足

$$\|a\|_\infty\leqslant1,\ \int a(x)x^\alpha dx=0 \quad (|\alpha|\leqslant\gamma), \tag{3.3}$$

则 $|\langle f,\ a\rangle|\leqslant C\|f\|_{\dot{C}^\gamma}R^{\gamma+n}$.

当 $0<\gamma<1$ 时，这个引理几乎是显然的. $\gamma\geqslant1$ 的情形将在一

节中证明.

最后，由于$|\langle f, a_k\rangle| \leqslant C\|f\|_{\dot{C}^\gamma}$，而$\sum_0^\infty |\lambda_k| \leqslant (\sum_0^\infty |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ $(0<p\leqslant 1)$，故该级数收敛. 我们用$\langle S, f\rangle = \sum_0^\infty \lambda_k \langle f, a_k\rangle$定义分布 S，其中 $f\in\dot{C}^\gamma$，而 H^p 就作为 $\dot{C}^\gamma$ 的共轭空间的一个子空间而出现.

现在我们想用小波级数来刻划 H^p 空间. 为此，使用属于 H^p 的小波是方便的，即使用有充分多矩为零的小波，也就是说，我们应限于使用具有 $\gamma > n\left(\frac{1}{p}-1\right)$ 正则性的小波. 如果满足这些条件，那么小波就属于 $\dot{C}^\gamma\left(\gamma = n(\frac{1}{p}-1)\right)$，即数积$\langle S, \psi_\lambda\rangle$对所有分布 $S\in H^p$ 有意义.

有了这些约定后，我们有下面的定理.

定理 4 分布 $S\in H^p(\mathbb{R}^n)$是满足条件

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|^2 \ |\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{3.4}$$

的小波级数$\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 的和.

定理 4 的证明是定理 1 的证明的直接修正. 它建立在以下事实上：对所有由 ± 1 构成的序列 $\omega(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$，由 $U_\omega(\psi_\lambda) = \omega(\lambda)\psi_\lambda$ $(\omega = (\omega(\lambda))_{\lambda\in\Lambda})$ 所定义的算子 U_ω: $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 可以延拓成 H^p 上的线性连续算子，只要 $p\in(0, 1]$，并且$\gamma > n\left(\frac{1}{p}-1\right)$.

这个重要的性质来源于小波满足的零矩条件以及将在第Ⅶ章中讲述的以下一般结果.

命题 4　设 $T: L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个线性连续算子．设 $r\geq 1$ 是一个整数．限制到对角线的余集上，对所有满足 $|\alpha|\leq r$ 的多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}$, T 的分布核 K 满足 $|\partial_y^\alpha K(x, y)|\leq C|x-y|^{-n-|\alpha|}$．此外还假设，对所有满足 $|\beta|\leq r$ 的多重指标 β, 模掉次数 $\leq r$ 的多项式，$T^*(x^\beta)=0$ 成立．则对任意 $p\in(0, 1]$ 且 $n\left(\frac{1}{p}-1\right)<r$, T 可以延拓成 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的线性连续算子．

我们来指出条件 $T^*(x^\beta)=0$ 的性质．如果 T 的核是由在无穷远处为 $O(|x-y|^{-n-|\beta|-1})$ 的 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $K(x, y)$ 给出的话，那么条件 $T^*(x^\beta)=0$, 简单地说就是对 $y\in\mathbb{R}^n$, 恒有 $\int x^\beta K(x, y)dx=0$. 在我们所考虑的情形，这个积分不收敛．但是存在一种收敛方式，这就是作用于一个所有 $\leq|\beta|$ 的矩为零的试验函数 $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 对 y 积分．当对 x 积分时，我们区分 $|x|\leq 3R$ 和 $|x|\geq 2R$ 的情形，其中 $R>0$ 是由 f 的支集包含在 $|y|\leq R$ 中这件事决定的．为了限制到这两个区域上，使用单位分解 $1=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)$. 这时，二重积分 $\iint x^\beta\varphi_0(x)K(x, y)f(y)dxdy$ 有意义，这是因为可以解释它为分布 K(K 是 T 的分布核）作用于试验函数 $x^\beta\varphi_0(x)f(y)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 的值．对第二个二重积分作如下处理：先对 y 作分部积分，因为 f 的不超过 $|\beta|$ 阶的矩都是零，这是办得到的．这就改善了核 $K(x,y)$ 在无穷远处的表现．

这个注就讲清楚了．使用定理 1 的证明便得到了定理 4.

命题 4 的证明要用到 Coifman 和 Weiss 引进的分子概念．函数 $g(x)$ 是一个中心在 x_0, 宽度为 d, 并且型号为 $s>n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ 的分子，如果

$$\left(\int_{R^n} |g(x)|^2\left(1+\frac{|x-x_0|}{d}\right)^{2s} dx\right)^{1/2} \leqslant d^{-n((1/p)-(1/2))} \quad (3.5)$$

成立， 并且对满足 $|\alpha|\leqslant n\left(\frac{1}{p}-1\right)$ 的多重指标 α, $\int x^{\alpha} g(x)dx=0$ 也成立.

在作一个规范化后，p 原子就是 p 分子. 我们将用 Coifman 和 Weiss 的方法来证明：型号为 $s>n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ 的分子属于 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 中的一个有界集. 最后，把 p 原子映成 p 分子的线性算子 T 可以连续地延拓到 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上. 通过乘一个因子使它规范化后，这就是命题 4 的算子 T 的情形. 我们将在第 Ⅶ 章第 3 节详细叙述它的证明.

4. Hölder 空间

我们先定义非齐次 Hölder 空间. 事实上，由于它是函数空间，它比齐次的空间更简单. 若 E 是一个非齐次 Hölder 空间，则 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset E\subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 并且这两个包含关系都是连续的. 这个性质对齐次空间就不成立，因为它们是函数空间的商空间. 这里，我们将要构造一个实现算子，可以用传统的 Littlewood－Paley 分解或用小波级数来研究这个算子.

当 $0<s<1$ 时，由定义，空间 $C^s(\mathbb{R}^n)$是其连续模 $\omega(h)$ 满足 $\omega(h)\leqslant Ch^s$（对某个常数 C）的有界连续函数的 Banach 空间. 该连续模定义为 $\sup\{|f(x)-f(y)|;\ |x-y|\leqslant h\}$. $f\in C^s$ 的模定义为 $\|f\|_\infty+\sup\limits_{0<h\leqslant 1}\ \omega(h)\ h^{(-s)}$.

当 $s=1$ 时，用满足以下两个条件的 Zygmund 类代替 $C^1(\mathbb{R}^n)$: f 有界连续，并且存在常数 C, 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 任意 $y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|\leqslant C|y|. \tag{4.1}$$

最后，当 $m<s\leqslant m+1$ 时，$f\in C^s(\mathbb{R}^n)$ 等价于 f 是一个通常意义下的 C^m 类函数，并且它的所有导数 $\partial^\alpha f\ (|\alpha|\leqslant m)$ 属于 C^{s-m}.

我们不能用(1.1)型的小波级数的系数的模刻划非齐次的空间 $C^s(\mathbb{R}^n)$. 这是因为 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $C^s(\mathbb{R}^n)$ 的"分量"，而 L^∞ 是不能用小波系数的模来刻划的.

以下定理通过级数(1.2)给出了非齐次 Hölder 空间 C^s 的刻划；但在 $s\in\mathbb{N}$ 时，要用 Zygmund 类代替 C^s.

定理 5 函数 $f\in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ 属于 $C^s(\mathbb{R}^n)$，当且仅当在 $r>s$ 正则的多分辨率分析中，小波系数

$$\beta(\lambda)=\int f(x)\overline{\varphi}(x-\lambda)dx \quad (\lambda\in\mathbb{Z}^n)$$

和

$$\alpha(\lambda)=\int f(x)\overline{\psi}_\lambda(x)dx \ (\lambda\in\Lambda_j,\ j\geqslant 0)$$

满足

$$|\beta(\lambda)|\leqslant C_0 \quad (\lambda\in\mathbb{Z}^n)$$

及

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant C_1 2^{-nj/2}\ 2^{-js} \quad (\lambda\in\Lambda_j,\ j\in\mathbb{N}).$$

从 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 及 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$，直接得到条件 $|\beta(\lambda)|\leqslant C_0$. 但是对 $\alpha(\lambda)$ $(j\geqslant 0)$ 所加的条件则与 f 的正则性有关而不需要 $\|f\|_\infty$ 这个控制. 即加在 $\alpha(\lambda)$ 上的条件是从 f 属于相应的齐次空间而得到的. 我们现在就来定义它.

我们先来考察齐次 Hölder 空间并证明一个基本引理，然后再证明定理 5. 可以用这个引理控制由一个(或一类)齐次 Hölder 空间的函数 f 与满足一定消失矩条件的可积函数 g 构成的数积.

回忆一下 $0<s<1$ 时齐次 Hölder 空间的定义．按定义，一个连续函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 的连续模为 $\omega_f(h)=\sup\limits_{|x-y|\leqslant h}|f(x)-f(y)|$．这样，$f\in\dot{C}^s$ 当且仅当存在常数 C，使得对所有 $h>0$，$\omega_f(h)\leqslant Ch^s$ 成立．在这里，大的 h 值与小的 h 值起着同样重要的作用．由定义，f 的 $\dot{C}^s$ 模就是这些常数的下确界．我们立即发现，所定义的模实际上还不是一个模，因为常数函数的模是零．补救的办法是当 $0<s<1$ 时，定义 $\dot{C}^s$ 为上述函数模掉常数的商空间．

为了证明 $\dot{C}^s$ 是一个 Banach 空间，必须定义一个实现算子，它把函数类的一个代表，即一个函数 f_0 与整个函数类 $f\in\dot{C}^s$ 联系起来，并且满足不等式 $\sup\limits_k|f_0(x)|\leqslant C(K)\|f_0\|_{\dot{C}^s}$，其中 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一紧集，$C(K)$ 仅依赖于 K．当我们要证明 $\dot{C}^s$ 的完备性时，这个不等式就起作用了．事实上，从级数 $\sum\limits_0^\infty f_j$ 出发，其中 $\|f_j\|_{\dot{C}^s}\leqslant C2^{-j}$．我们想证明该级数收敛到一个函数 $f\in\dot{C}^s$．为此，对每个 f_j 找一个代表元 $f_{j,0}$．它满足 $\sup\limits_k|f_{j,0}|\leqslant C(K)C2^{-j}$．在任意紧集上，级数 $\sum\limits_0^\infty f_{j,0}$ 是一致收敛的，它定义了一个函数 f_0．

直接得到 $f_0\in\dot{C}^s$；f_0 就是 $\dot{C}^s$ 的一个代表元，故 $\dot{C}^s$ 是 Banach 空间．

$f\in\dot{C}^s$ 的典型实现是加上条件 $f(0)=0$．这样对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，$|f(x)|\leqslant C|x|^s$ 成立．因为 $|x|^s\in\dot{C}^s$，这就给出了可能增长性的最好的估计．

为了对齐次空间 $\dot{C}^s(0<s<1)$ 得出结论，我们可以发现，这些齐次空间可以从非齐次空间 C^s 用一般的法则得到．该法则发现了当 λ 趋向于 $+\infty$ 时，对它有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-s}\|f(\lambda x)\|_{C^s}=\|f\|_{\dot{C}^s}$．

下面，考虑一个更精巧的情形，即齐次的 Zygmund 类.

我们说 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数 f 属于齐次 Zygmund 类，如果存在常数 C，使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 和任意 $y\in\mathbb{R}^n$，有 $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \leqslant C|y|$. 不要求 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 在一维时，函数 $f(x)=x\log|x|$ 属于 Zygmund 类，但是当 $\alpha>1$ 时，$f(x)=x|\log|x||^\alpha$ 不属于 Λ_*.

Λ_* 空间的实现问题不像 $\dot{C}^s(0<s<1)$ 那么容易. 事实上，差 $f(x)-f(0)$ 不是所找的实现，这是因为它不是由模掉仿射函数而确定的. 这让我们想起用 $f(x)-f(0)-\sum_1^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ 来代表 f; 但是当 $f\in\Lambda_*$ 时，该表达式没有意义. 事实上，一个 Λ_* 的函数的偏导数不是 Radon 测度. 一个一维的例子是由缺项 Fourier 级数 $\sum_0^\infty 2^{-k}\sin 2^k x$ 给出. 它属于 Λ_*，但它的导数 $\sum_0^\infty \cos 2^k x$ 不是一个分布.

为了解决 Zygmund 类函数的实现问题，人们使用了 Littlewood－Paley 分析. 在这里，它是比 Taylor 级数更精巧更有效的工具.

应该精确地估计 Zygmund 类函数在无穷远处的性质，以保证某些积分的收敛性.

引理 7 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上满足 (4.1) 的连续函数，则当 $|x|$ 趋于无穷时，$f(x)=O(|x|\ \log|x|)$.

该估计为最优估计，这是因为 $f(x)=x\log|x|$ 属于 Λ_*，这很容易验证.

为证明引理 7，我们写出 (4.1) 的一个特殊情形：$|f(2x)-2f(x)+f(0)|\leqslant C|x|$. 由此得到 $|f(2x)|\leqslant 2|f(x)|+|f(0)|+C|x|$. 设

$$\eta_j=2^{-j}\sup_{2^j\leqslant|x|<2^{j+1}}|f(x)| \quad ,$$

就有 $\eta_{j+1}\leqslant\eta_j+|f(0)|2^{-j-1}+2C$; 因此，$\eta_j\leqslant\eta_0+|f(0)|+2C_j$. 这就是所要的估计.

现在介绍 Littlewood－Paley 分析的定义，在这里，我们要用到它. 设 φ 是 Schwartz 函数类的一个径向函数，它的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(\xi)$ 当 $|\xi|\leqslant\frac{1}{2}$ 时等于 1，当 $|\xi|\geqslant 1$ 时等于零. 设 S_j 是用 $2^{nj}\varphi(2^jx)$ 做卷积的算子. 又设 $\Delta_j=S_{j+1}-S_j$, 则 Δ_j 是与径向函数 $2^{nj}\psi(2^jx)$ 卷积的算子，其中 $\psi(x)=2^n\varphi(2x)-\varphi(x)$.

下面的引理给出了 Zygmund 类的重要刻划.

引理 8 设 $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个缓分布，且 $f=\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta_j(f)$ 在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛，则 $f\in\Lambda_*$ 当且仅当 $\|\Delta_jf\|_\infty\leqslant C'\,2^{-j}$, 其中 C' 是某个常数($j\in\mathbb{Z}$).

先设 $f\in\Lambda_*$, 引理 7 告诉我们，$f(x)$ 在无穷远处是缓增的(事实上，引理 7 对无穷远处的估计要精确得多). 因此，$\mathbb{R}^n$ 上属于 Λ_* 的连续函数就是缓分布，故

$$\Delta_jf(x)=\int f(x-y)\psi_j(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int(f(x+y)+f(x-y)-2f(x))\psi_j(y)dy,$$

这是因为 ψ_j 是径向函数，并且积分值为零. 于是

$$\|\Delta_jf\|_\infty\leqslant\frac{C}{2}\int|y|\,|\psi_j(y)|dy=C'2^{-j}.$$

因为 $\int\psi_j(x)dx=0$，以及 $\int x_1\psi_j(x)dx=0$，$\cdots\int x_n\psi_j(x)dx=0$，

所以 Δ_j 在 Zygmund 类函数模掉仿射函数的商空间上是有效定义的．

我们现在来证明引理 8 的另一半．事实上，从序列 $f_j(j\in\mathbb{Z})$ 出发可以做得更好点，其中 $f_j(j\in\mathbb{Z})$ 是 C^2 的函数，它们满足 $\|f_j\|_\infty\leqslant C_0\,2^{-j}$ 以及当 $|\alpha|=2$ 时，$\|\partial^\alpha f_j\|_\infty\leqslant C_1 2^j$．在这些条件下定义 $g(x)$ 是和 $\sum_{-\infty}^{\infty}f_j$，并且证明这个和满足

$$|g(x)|\leqslant C(1+|x|)\log(2+|x|),\tag{4.2}$$

其中 C 仅依赖于 C_0，C_1 及维数 n．

这样，我们就将解决模去仿射函数后的 Λ_* 函数的实现问题．

先来证明：当 $|\alpha|=2$ 时，$f_j=\Delta_j f$ 满足条件 $\|\partial^\alpha f_j\|_\infty\leqslant C_1 2^j$．由于 f_j 的 Fourier 变换的支集包含在球 $|\xi|\leqslant 2^{j+1}$ 中，因此可以使用 Bernstein 不等式（第 I 章）．

当 $j\leqslant 0$ 时，令

$$r_j(x)=f_j(x)-f_j(0)-\sum_1^n x_k\partial f_j/\partial x_k(0).$$

由 Taylor 公式知 $|r_j(x)|\leqslant C|x|^2 2^j$．设

$$g(x)=\sum_1^\infty f_j(x)+\sum_{-\infty}^0 r_j(x).\tag{4.3}$$

在每个紧集上，这个级数是一致收敛的．我们来说明，(4.2) 给出了 $g(x)$ 在无穷远处的性质．为此，使用不等式 $\|\partial^\alpha f_j\|_\infty\leqslant C'$ $(|\alpha|=1)$，其中 $f_j=\Delta_j f$，这也是一个 Bernstein 不等式，它来源于普通函数的相邻阶导数间的 L^∞ 模的对数凸性．因此 $|r_j(x)|\leqslant C|x|$．当 $|x|\geqslant 1$ 时，选择整数 $m\in\mathbb{N}$，使得 $2^m\leqslant|x|<2^{m+1}$ 成立．把 $\sum_{-\infty}^0 r_j$ 分成

$\sum_{-\infty}^{-m}+\sum_{-m+1}^{0}$，用 $|r_j(x)|\leqslant C|x|^2 2^j$ 去控制第一个级数中的项，用 $|r_j(x)|\leqslant C|x|$ 去控制第二个级数中的项，就立即得到了不等式(4.2)．

刚才对级数 $\sum_{-\infty}^{\infty} f_j(x)$ 作的修正可以用来作重正规化．这个重正规化可以把一个发散级数变成收敛级数．而所用的修正是仿射函数，这与 Λ_* 上的等价关系是相容的．

现在验证 $g(x)\in\Lambda_*$．考察

$$g(x+y)+g(x-y)-2g(x)=\sum_{1}^{\infty}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x))$$
$$+\sum_{-\infty}^{0}(r_j(x+y)+r_j(x-y)-2r_j(x)).$$

当 $j\leqslant 0$ 时，可以用 $f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x)$ 代替 $r_j(x+y)+r_j(x-y)-2r_j(x)$．因此

$$g(x+y)+g(x-y)-2g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}(f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x)).$$

我们用 $2^{-m}\leqslant|y|<2^{-m+1}$ 定义一个 $m\in\mathbb{Z}$，然后把级数 $\sum_{-\infty}^{\infty}$ 分成 $\sum_{j\leqslant m}$ 和 $\sum_{j>m}$．

在第一个和式中，根据 Taylor 公式，可以用 $C|y|^2\sum_{|\alpha|=2}\|\partial^\alpha f_j\|_\infty\leqslant C'|y|^2\, 2^j$ 控制 $|f_j(x+y)+f_j(x-y)-2f_j(x)|$，相应项的贡献就是 $2C'|y|^2\, 2^m\leqslant 4C'|y|$．

至于和 $\sum_{j>m}$，可以平凡地用 $\|f_j\|_\infty$ 去控制 f_j，便得到 $O(2^{-m})=O(|y|)$．因此函数 g 就满足(4.1)．

引理 8 证毕．

这里有一个重要的结论．

命题 5 设 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int_{|x|\geq 2}|g(x)|\ |x|\ \log|x|dx<\infty$ 以及

$$\int g(x)dx=\int x_1 g(x)dx=\cdots=\int x_n g(x)dx=0, \tag{4.4}$$

则存在常数 $C(g)$，使得对任意函数 $f\in\Lambda_*$，任意 $\lambda>0$ 和任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$，有

$$\left|\int f(x)g(\lambda x+x_0)dx\right|\leqslant C(g)\lambda^{-n-1}\|f\|_{\Lambda^*}. \tag{4.5}$$

为证明(4.5)，使用齐次空间 $\dot{\Lambda}_*$. 若 $f\in\dot{\Lambda}_*$，则对任意的 $\lambda>0$，对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$\lambda^{-1}f(\lambda(x-x_0))$ 也属于 $\dot{\Lambda}_*$，并且有相同的模．因此，只需对 $x_0=0$ 和 $\lambda=1$ 证明命题 5．这时，用 $f(x)$ 的代表 $F(x)$ 代替 $f(x)$，它满足 $|F(x)|\leqslant C(1+|x|)\ \log(2+|x|)\|f\|_{\Lambda^*}$. 这么做并没改变积分 $\int f(x)g(x)dx$，从而得到所要求的结论．

我们继续介绍齐次空间 $\dot{C}^s(s>0)$，并给出这个空间的实现方法．

设 $m<s<m+1(m\in\mathbb{N})$，一个 C^m 类的函数 f 属于 $\dot{C}^s$，当且仅当它的所有导数 $\partial^\alpha f$ $(|\alpha|=m)$ 属于前面已定义过的齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^r$，其中 $r=s-m$.

函数 $f\in\dot{C}^s$ 的实现方法例如就是 x_0 点的 m 阶 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(x_0)+R(x_0;\ x),$$

其中

$$|R(x_0;\ x)|\leqslant C|x-x_0|^s.$$

反之，设 $f(x)$ 是一个连续函数，有某个常数 C，对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$，存在阶数不超过 m 的多项式 $P(x_0, x)$，使得 $f(x)=P(x_0, x)+R(x_0, x)$，并且 $|R(x_0, x)|\leqslant C|x-x_0|^s$，则 $f(x)$ 就属于 $\dot{C}^s$. 这在本质上也是通过阶数 $\leqslant m$ 的多项式逼近来刻划 $\dot{C}^s$.

当 $s=m+1$ 时，用 Zygmund 类定义 $\dot{C}^s$(为了这些结果当 s 是整数时不出现间断，就应该如此去做).

因此，当 $s=m+1$ 时，齐次空间 $\dot{C}^s$ 定义为所有 $|\alpha|=m$ 阶导数 $\partial^\alpha f$ 属于 Zygmund 类的 C^m 类函数的集合. 事实上，这个空间应该用模去次数不超过 $m+1$ 的多项式来定义.

使用在 Zygmund 类时给出的推理，我们就证明了：存在常数 C，使得对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和任意函数 $f\in\dot{C}^s(s\in\mathbb{N})$，可以构造一个多项式 $P(x_0, x)$ 和函数 $g(x_0, x)$，满足以下性质:

$$P(x_0, x)\text{ 的阶数小于等于 } s. \tag{4.6}$$

$$|g(x_0;\ x)|\leqslant C|x-x_0|^s\omega(|x-x_0|)\|f\|_{\dot{C}^s}, \tag{4.7}$$

其中 $\omega(u)=|\log u|$ （当$0<u\leqslant\frac{1}{2}$ 时)，$\omega(u)=\log 2$（当$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 2$ 时)及 $\omega(u)=\log u$(当 $u\geqslant 2$ 时).

$$f(x)=\mathrm{P}(x_0;\ x)+\mathrm{g}(x_0;\ x). \tag{4.8}$$

这种空间 C^s 函数的实现方法具有以下重要性质，我们将在第X 章第 4 节中使用它.

定理 6 设 s 是一个正实数，r 是一实数而 $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是一个满足以下三条性质的缓分布:

(1) S 在 $|x|>1$ 上的限制是 $L^\infty(|x|>1)$ 的函数 $b(x)$，并且满足 $|b(x)|\leqslant C_0|x|^{-n-s-r}$ $(|x|>1)$; (4.9)

(2) 当 $u\in C^s$，它的支集包含在 $|x|\leqslant 2$ 中，并且它的 C^s 模不超过 1 时，有 $|\langle S, u\rangle|\leqslant C_1$; (4.10)

(3) 对任意满足 $|\alpha|\leqslant s$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，$\langle S, x^\alpha\rangle=0$. (4.11)

则对任意 $f\in\dot{C}^s$，$\langle S, f\rangle$有意义，并且 $|\langle S, f\rangle|\leqslant C\|f\|_{\dot{C}^s}$.

为了证明它，使用(4.8)来分解 f，并让 $x_0=0$. 这时$\langle S, f\rangle=\langle S, g\rangle$. 下面设 $\varphi_0\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，它在 $|x|\leqslant 1$ 的邻域上等于 1，而它的支集包含在 $|x|\leqslant 2$ 中. 记 $\varphi_1=1-\varphi_0$，并把 g 写成 $g=\varphi_0 g+\varphi_1 g$. 从(4.10)就得到 $|\langle S, \varphi_0 g\rangle|$ 的控制，从(4.7)和(4.9)就得到 $|\langle S, \varphi_1 g\rangle|$ 的控制.

下面的定理通过小波系数大小的阶给出了齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^s$ 的刻划. 我们从 $r\geqslant 1$ 正则多分辨率分析 $V_j(j\in\mathbb{Z})$ 出发，$\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是由 V_j 得到的一组小波. 设 $0<s<r$，$f\in\dot{C}^s$；则对任意 $j\in\mathbb{Z}$，对任意 $\lambda\in\Lambda_j$，有

$$|(f, \psi_\lambda)|\leqslant C2^{-(nj/2+js)}\|f\|_{\dot{C}^s}. \tag{4.12}$$

为证明它，只需使用引理 6. 小波的振动性保证了(4.11).

(4.12)的逆是由下述定理阐述的.

定理 7 小波级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 定义了齐次空间 $\dot{C}^s(0<s<r)$ 的一个函数，当且仅当存在常数 C，使得对任意 $j\in\mathbb{Z}$ 和任意 $\lambda\in\Lambda_j$，有

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant C2^{-nj/2}2^{-sj}. \tag{4.13}$$

我们来证明它. 用 f_j 表示 $\sum_{\lambda\in\Lambda_j}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$，由于小波的局部性，这个和总是收敛的. 根据小波的局部性和正则性，知 $\|\partial^\alpha f_j\|_\infty\leqslant C2^{|\alpha|}2^{-sj}$. 级数 $\sum_{-\infty}^{\infty}f_j(x)$ 不能在通常意义上收敛，应该对它重正规化. 这个重正规化是我们对 Zygmund 已使用过的方法. 细节留给读者.

上述刻划的一个十分简单的应用就是"Sobolev 嵌入定理":

$\dot{L}^{p,s} \subset \dot{C}^{\sigma}$, 其中 $\sigma = s - \frac{n}{p} > 0$.

5. Beurling 代数

Beuring 代数是 A. Beurling 为替代 Wiener 代数 $A(\mathbb{R}^n) = \mathscr{F} L^1(\mathbb{R}^n)$ 而给出的. 他告诉我们, 在 P. Malliavin 著名反例之前, 他就知道 Wiener 代数的谱综合是不可能的, 我们将看到, Beuring 代数很象 Wiener 代数, 但它有谱综合. 我们打算用小波系数的模去刻划 Beuring 代数中的函数. 然后会发现, 这是一个特殊情形, 而一般情形与 Besov 空间有关.

先定义一族权 Ω: 如果 $\omega(x)$ 是定义 $\mathbb{R}^n$ 上的非负径向 (即仅依赖于 $|x|$) 函数, 且 $\omega(x)$ 是 $|x|$ 的增函数, 满足

$$\int_{R^n} \frac{dx}{\omega(x)} < \infty , \tag{5.1}$$

就说 $\omega \in \Omega$.

一个例子是 $\omega(x) = (1 + |x|^2)^s$, 其中 $s > \frac{n}{2}$. 用 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ 表示满足 $\int_{R^n} |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty$ 的可测函数 f 构成的 Hilbert 空间, 由 Cauchy - Schwarz 不等式, 有 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega dx) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

定义 1 $\mathscr{A}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上具有以下性质的连续函数的集合: f 可以写成 $f = \hat{F}$, 其中 F 对某个 $\omega \in \Omega$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^n, \omega dx)$.

换言之, $\mathscr{A} = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}^n, \omega dx))$, 其中 $\mathscr{F}$ 表示 Fourier 变换.

定理 8 设 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是正则性指标 $r>\dfrac{n}{2}$ 的一组小波基，则 $f\in\mathscr{A}$ 的小波系数由条件

$$\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj/2}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}<\infty \tag{5.2}$$

刻划．使用 (5.2) 定义的模，$\mathscr{A}$是一个 Banach 代数，它包含在 Wiener 代数 $A(\mathbb{R}^n)$ 中．

为了证明这个定理，我们先证由下述引理给出的中间结果．

引理 9 对 $j\in\mathbb{Z}$，用 Γ_j 表示二进环 $2^j\leqslant|\xi|\leqslant2^{j+1}$．考虑原始形式上的一个 Littlewood－Paley 分解．设 $f=\sum_{-\infty}^{\infty}f_j$，其中 $\hat{f}_j$是 $\hat{f}$ 与 Γ_j 的特征函数之积，则

$$f\in\mathscr{A}\Leftrightarrow\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj/2}\|f_j\|_2<\infty. \tag{5.3}$$

首先设 $f\in\mathscr{A}$，用 g_j表示函数 $\hat{f}_j$．由定义有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_j}|g_j(\xi)|^2\omega(\xi)d\xi<\infty. \tag{5.4}$$

记 $\omega(\xi)$ 在 Γ_j 上的下界值为 ω_j；当 $|\xi|=2^j$，有 $\omega_j=\omega(\xi)$，并且 ω_j是 $\omega(\xi)$ 在 Γ_{j-1} 中的上界．因此，

$$\int_{R^n}\frac{dx}{\omega(x)}=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_j}\frac{dx}{\omega(x)}\simeq\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{2^{nj}}{\omega_{j+1}}.$$

故 $\omega\in\Omega$，当且仅当 $\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj}/\omega_j<\infty$．级数 (5.4) 收敛等价于 $\sum_{-\infty}^{\infty}\|g_j\|_2^2\ \omega_j$

收敛．由于 $\sum_{-\infty}^{\infty}\|g_j\|_2^2\omega_j$ 与 $\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj}/\omega_j$ 这两个级数的收敛性，用 Cauchy－Schwarz 不等式，就得到 $\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj/2}\|g_j\|_2<\infty$.

反之，当 $2^j\leqslant|\xi|<2^{j+1}$ 时，我们定义 $\omega(\xi)$ 为 $\omega(\xi)=\omega_j$，其中 $\frac{1}{\omega_j}=\sum_{k\geqslant j}\|g_k\|_2\,2^{-kn/2}$，则函数 $\omega(\xi)$ 是上升的径向函数．因为

$$\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj}/\omega_j=\sum_{k\geqslant j}\sum 2^{nj}2^{-kn/2}\|g_k\|_2=(1-2^{-n})^{-1}\sum_{-\infty}^{\infty}2^{kn/2}\|g_k\|_2<\infty,$$

所以

$$\int\frac{d\xi}{\omega(\xi)}<\infty.$$

因此

$$\int|\hat{f}(\xi)|^2\omega(\xi)d\xi=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_j}|g_j(\xi)|^2\omega_j d\xi=\sum_{-\infty}^{\infty}\omega_j\|g_j\|_2^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj}/\omega_j<\infty.$$

刚才使用了不等式 $\|g_j\|_2\leqslant 2^{nj/2}/\omega_j$，这是由 ω_j 的定义本身得到的（仅保留定义 ω_j 的级数的第一项）．

自然，如果不使用引理 9 这个 Littlewood－Paley 分解的雏形，而使用通常所用的柔和形式，即 $\hat{f}_j=\hat{f}\cdot\theta(2^{-j}\xi)$，这时 (5.3) 仍然是对的，其中 θ 是一个在原点的邻域为零，在 $1<|\xi|<2$ 上不为零的 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 的函数．

特别地，可以从 Littlewood－Paley 多分辨率分析出发，用 D_jf 定义 f_j，仍有 (5.3) 所述的等价性．

然后，我们有 $\|D_j(f)\|_2=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_j}|\alpha(\lambda)|^2\right)^{1/2}$．这就结束了用 (5.2) 刻划 $\mathscr{A}$ 的证明．

还应该验证，在所使用的多分辨率分析的正则性指标 $r>n/2$ 的条件下，(5.2) 不依赖所用的小波基.

设 $\widetilde{\psi}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是另一组小波基. 定义酉算子 U: $L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 为 $U(\psi_\lambda)=\widetilde{\psi}_\lambda$. 这样，$U$ 的分布核是 $\sum_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{\psi}_\lambda(x)\overline{\psi}_\lambda(y)$, 记 $K(x, y)$ 为该分布核在由 $x\neq y$ 所定义的开集上的限制. 由直接计算知

$$|\partial_x^\alpha K(x,\ y)|\leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|}\qquad (0\leqslant|\alpha|<r). \tag{5.5}$$

此外，若 $0<|\alpha|\leqslant r-1$, 模去次数 $\leqslant\alpha$ 的多项式，有 $U(x^\alpha)=0$. 这是因为小波 ψ_λ 的矩为零. 对 $|\alpha|\leqslant r-1$, 可以用 (5.5) 精确地定义 $U(x^\alpha)$, 这是第Ⅹ章的内容. 根据到第Ⅹ章才证明的结果，再加上 U 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上连续，就得到 U 在所有齐次 Besov 空间 $\dot{B}_p^{s,q}$ 上连续，其中 $0<s<r$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. 而 Beuring 代数与 Besov 空间 $\dot{B}_2^{n/2,2}$ 重合. 由于算子 U 的不变性，Beuring 代数的刻划不依赖于所选择的小波基.

在结束之前，还应验证 $\mathscr{A}$ 是一个代数，它的乘法就是函数通常的乘法. 回到 $\mathscr{A}$ 中函数的 Fourier 变换刻划. 我们想证明，$f\in\mathscr{F}\mathscr{A}$ 与 $g\in\mathscr{F}\mathscr{A}$ 的卷积还属于 $\mathscr{F}\mathscr{A}$.

为了不使叙述太复杂，设 $B=\mathscr{F}\mathscr{A}$, $\|u\|_B=\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj/2}\|u_j\|_2$, 其中 u_j 是 u 与环 Γ_j 的特征函数的乘积.

注意到以下事实是方便的：如果 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 在球 $|x|\leqslant R$ 之外为零，则有

$$\|f\|_B\leqslant CR^{n/2}\|f\|_2. \tag{5.6}$$

因此，显然可以限于考虑 $R=2^m(m\in\mathbb{Z})$, 这时可以分解 f 成 $\sum_{-\infty}^{m-1}f_j$. 因此

$$\begin{aligned}\|f\|_B=\sum_{-\infty}^{m-1}2^{nj/2}\|f_j\|_2\leqslant\sum_{-\infty}^{m-1}2^{nj/2}\|f\|_2&=(1-2^{-n/2})^{-1}2^{nm/2}\|f\|_2\\&=CR^{n/2}\|f\|_2.\end{aligned}$$

再回到卷积 $f*g=h$，记 $f=\sum_{-\infty}^{\infty}f_j$，$g=\sum_{-\infty}^{\infty}g_j$ (f_j 与 g_j 支在 Γ_j 上)，由此得到 $h=\sum_{-\infty}^{\infty}h_j$，其中 $h_j=f_j*g_j+\sum_{k<j}f_k*g_j+\sum_{k<j}g_k*f_j$. 卷积的支集包含在构成卷积的两个函数的支集的代数和内. 因此，h_j 的支集就包含在 $|x|\leqslant 2^{j+2}$ 中. 为了证明 $h\in B$，只需证明 $\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj/2}\|h_j\|_2<\infty$ 并使用(5.6).

用明显的不等式 $\|u*v\|_2\leqslant\|u\|_1\ \|v\|_2$ 控制 $\|h_j\|_2$，并注意到 $\|f_j\|_1\leqslant|\Gamma_j|^{\frac{1}{2}}\ \|f_j\|_2=C2^{nj/2}\|f_j\|_2$. 最后得到

$$\left\|\sum_{k<j}g_k*f_j\right\|_2\leqslant\sum_{k<j}\|g_k\|_1\ \|f_j\|_2\leqslant C\sum_{k<j}2^{nk/2}\|g_k\|_2\ \|f_j\|_2\leqslant C\|g\|_B\ \|f_j\|_2.$$

用类似的方法处理 h_j 的其它两项，便得

$$\sum_{-\infty}^{\infty}2^{nj/2}\|h_j\|_2\leqslant 3C\|f\|_B\ \|g\|_B.$$

6. 单峰代数

我们想描述 Wiener 代数 $\mathscr{F}L^1(\mathbb{R}^n)$ 的第二个有意义的逼近，即"单峰代数". 用小波基分析它是特别简单的.

对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 与任意 $\delta>0$，考虑宽度为 $\delta>0$ 的 Gauss 函数 $\exp(-|x-x_0|^2/2\delta)$，它的中心是 x_0，高是 1(这里没有作通常的规范化)，记它为 $g_{(x_0,\delta)}(x)$.

一个直接的观察得到

$$g_{(x_0,\delta_0)}(x)g_{(x_1,\delta_1)}(x)=\gamma g_{(x_2,\delta_2)}(x), \tag{6.1}$$

其中 $0<\gamma\leqslant 1$，$\dfrac{1}{\delta_2}=\dfrac{1}{\delta_0}+\dfrac{1}{\delta_1}$，而 x_2 是点 x_0 与 x_1 在系数

$\frac{\delta_2}{\delta_0}$ 与 $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ 作用下的重心.

等式(6.1)归结到构造凸组合 $\sum p g_{t_j}(x)$ 的集合 S, 其中 $t_j=(x_j, \delta_j)$ 属于 $\mathbb{R}^n\times(0, +\infty)$, 并且 $\sum p_j\geqslant 1$, $p_j\geqslant 0$, 这个凸集合在乘法作用下是稳定的.

这个简单的考察是构造 Gauss 单峰代数的出发点. 它定义为由 $\mathbb{R}^n$ 上所有在无穷远处为零, 并且可以写成

$$f(x)=\sum_0^\infty \lambda_j g_{(x_j,\delta_j)}(x) \tag{6.2}$$

的连续函数组成的 Banach 代数 B, 其中

$$\sum_0^\infty |\lambda_j|<\infty. \tag{6.3}$$

f 在 B 的模定义为对 f 的所有分解(6.2), 和式(6.3)的下确界.

如果在(6.2)中限制到有限项的和, 则(6.2)的分解是唯一的, 然而所得到的空间却是病态的. 首先, 它不适用于 Schwartz 函数类 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的函数. 此外, 序列

$$f_k(x)=\exp(-|x|^2)-\exp(-|x-x_k|^2) \quad (x_k\to 0)$$

理应趋向于零, 但它的模却是 2.

(6.2)引入的"原子分解"使这个病态消失了, 但却丧失了唯一性. 这个唯一性并不重要, 因为最终的典型分解是由小波取代 Gauss 函数完成的, 这样就有了唯一性. 而 Gauss 函数(由于它出奇的简单以及群性质)只是一个出发点. 下面就来叙述这个典型分解.

设 $V_j(j\in\mathbb{Z})$ 是一个 $r>n$ 正则的多分辨率分析, 设 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是由它决定的小波基.

定理 9 一个无穷远处为零的连续函数 f 属于 Banach 代数 B,

当且仅当它的小波系数 $\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ 满足条件

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}2^{nj/2}|\alpha(\lambda)|<\infty. \tag{6.4}$$

即 f 的小波系数按 L^∞ 模是收敛的.

为证明它，用 $N(f)$ 表示(6.4)左边级数的和．我们应该证明，当 f 由(6.2)给出时，$N(f)$ 是有限的．由于线性和凸性，只需考查一个 Gauss 函数 $\exp(-\delta|x-x_0|^2)$ $(\delta>0,\ x_0\in\mathbb{R}^n)$. 这可归结为考虑 $1\leqslant\delta\leqslant4$ 的情形．因为如果必要，可用 $2^m x$ 代替 x. 在这种情形 $(1\leqslant\delta\leqslant4,\ x_0\in\mathbb{R}^n)$，直接可验证(6.4)．我们留给读者去做这件事．

在相反的意义上，我们应该证明：所有依范数收敛的级数 $\sum\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ (其中 $\sum|\alpha(\lambda)|2^{nj/2}<\infty$) 收敛到 B 中的一个函数．为了简单，只限于用 Littlewood－Paley 多分辨率分析．我们使用下面的基本事实：若 $f(x)\in B$, 则对任意 $\delta>0$ 和任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$，有 $f(\delta x+x_0)\in B$, 并且这两个函数在 B 中的模相等．

为证明定理 9 的另一半，只需证明：$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 包含在 B 中．为此，我们使用以下引理．

引理 10 *存在常数 $C>0$, 使得对任意函数 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有 $f=\sum_0^\infty\lambda_k g_k(x)$, 其中 $\sum_0^\infty|\lambda_k|<\|f\|_1$, 而 g_k 是中心在 x_k, 宽度为 δ_k 的 Gauss 函数，并且它是被规范化了的，即 $\int g_k(x)dx=1$.*

换言之，

$$g_k(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\delta_k^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x-x_k|^2}{2\delta_k}\right).$$

这个引理是初等的，让读者去证明它.

下面是引理 10 的一个推论.

引理 11 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $g(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2}}$，则 $f*g\in B$，且 $\|f*g\|_B \leqslant C\|f\|_1$.

使用引理 10 给出的原子分解，问题就归结为 f 是一个在 L^1 模中规范化了的 Gauss 函数. 这时，$h=f*g$ 也是一个在 L^1 模中规范化了的 Gauss 函数，并且它的宽(或偏差)$\geqslant 1$. 由此得出 h 总是属于 B，并且 $\|h\|_B\leqslant C$.

引理 12 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，且 f 的 Fourier 变换有紧支集，则 $f\in B$.

事实上，用 $\hat{h}(\xi)=e^{|\xi|^2/2}\hat{f}(\xi)$ 定义 $h\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则有 $f=g*h$，其中 $g(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

引理 13 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset B$ 成立.

事实上，用 Littlewood－Paley 去分解 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的函数，若 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，则

$$f(x)=\sum_0^\infty f_j(2^jx) \quad ,$$

其中，f_j 的 Fourier 变换支在球 $|x|\leqslant 1$ 上，并且 $\|f_j\|_1$ 是一个速降序列. 我们使用上述引理及 B 的模的展缩不变性.

在 Littlewood－Paley 多分辨分析的情形，定理 9 就全部证完了. (6.4)对小波基选择的不变性是从关于 Beuring 代数中算子理

论的重要事实得出的．

可以用最小化的语言来解释单峰代数．考虑满足 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\subset B\subset C_0(\mathbb{R}^n)$ 的 Banach 代数 B，其中 C_0 是无穷远处为零的连续函数的代数，B 是 C_0 的子代数．我们要求 B 的模满足 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 所满足的同样条件，即对平移和展缩不变，也就是说，对任意 $\delta>0$ 和任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|f(\delta x+x_0)\|_B=\|f(x)\|_B.$$

因此，在这些 Banach 代数 B 中间，存在最小的一个，它恰恰就是单峰代数．它包含在所有其它满足如上条件的 Banach 代数中．

特别地，单峰代数包含在 Beuring 代数中．根据定理 8 和定理 9，这是显然的．

7. 特殊原子生成的空间

我们将要讨论的 Banach 空间是 Stein 和 Weiss 的 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的一个近似．这个近似来源于用"特殊原子"代替构造 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的原子．我们现在就给出它的定义．

先按照 O'Neil 和 Souza〔198〕的方法叙述一维情形．对任意区间 $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$，构造函数 $\mathscr{I}(x)$，它在 I 的左一半等于 $|I|^{-1}$，在 I 的右一半等于 $-|I|^{-1}$，在 I 以外的地方等于零．这样，$\mathscr{I}$ 是 Stein 和 Weiss 的空间 $H^1(\mathbb{R})$ 的原子．但它是一个特殊原子．这是因为相消性条件 $\int_I\mathscr{I}(x)dx=0$ 是由十分特殊的几何条件来保证的．

我们说函数 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 属于 $B_1^{0,1}$，当且仅当可以找到一列区间 I_k $(k\in\mathbb{N})$ 和一列系数 λ_k，使得下式成立：

$$\sum_0^\infty|\lambda_k|<\infty, \tag{7.1}$$

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\lambda_k \mathscr{I}_{I_k}(x) \quad . \tag{7.2}$$

这时，级数(7.2)在 $L^1(\mathbb{R})$ 中收敛，也在 $H^1(\mathbb{R})$ 中收敛.

我们将要证明的多维的结论，蕴含着以下一维的 $B_1^{0,1}$ 的函数 f 通过小波系数模 $|\alpha(\lambda)|$ 给出的刻划(是从 $r>1$ 正则的多分辨率分析得到的小波)：

$$\sum \alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)\in B_1^{0,1} \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_j}2^{-j/2}|\alpha(\lambda)|<\infty \quad . \tag{7.3}$$

(7.3)的意义是：当我们构造 $B_1^{0,1}$ 的原子时，稍微放宽原子的定义，f 的小波级数就给出了 f 的特殊原子分解.

此外，$B_1^{0,1}$ 函数的(在无穷远处为零的)原函数是第 6 节单峰代数中的函数. 这告诉我们怎样研究 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$ 函数的(在无穷远为零的)原函数. 事实上，这个空间是一个 Banach 代数，它的符号演算已由 S. Janson 阐明(〔135〕)：所有的 Lipschitz 函数可作用在 H^1 函数的原函数的 Banach 代数上.

回到多维的特殊原子. E 表示由满足以下性质的函数构成的 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的闭凸集合：

$$\int_{R^n}|a(x)|dx\leqslant 1,\ \int_{|x|\geqslant 2}|a(x)|\log|x|dx\leqslant 1,\ \int_{R^n}a(x)dx=0, \tag{7.4}$$

$$\int_{|y|\leqslant 1}\|a(x+y)-a(x)\|_{L^1(dx)}\frac{dy}{|y|^n}\leqslant 1. \tag{7.5}$$

又用 $A\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ 表示由所有函数 $b(x)=t^{-n}a(t^{-1}(x-x_0))$ 的集合，其中 $t>0$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $a\in E$. 称这些函数 $b(x)$ 为特殊原子.

我们定义极特殊原子，它的构造与特殊原子的构造相同，只是其中的 E 被 $F\subset E$ 代替：F 是 C^1 中支在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球内、积分值为零，并且满足 $\|a\|_\infty\leqslant 1$, $\|\partial a/\partial x_j\|_\infty\leqslant 1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 的函数的集合.

考虑一组由 $r>n$ 正则的多分辨分析得到的小波基．我们有

定理 10 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 f 的下面三个性质等价．

(1) 存在特殊原子列 $a_j(x)$ $(j\in\mathbb{N})$ 与数列 λ_j，使得 $\sum_0^\infty|\lambda_j|<\infty$，

并且 $f(x)=\sum_0^\infty\lambda_j a_j(x)$. (7.6)

(2) 在上述原子分解中，可以假设 $a_j(x)$ 是极特殊原子．(7.7)

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x) \quad 且 \quad \sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|2^{-nj/2}<\infty. \tag{7.8}$$

在证明这个结论之前，我们想作几点说明．(7.8) 中的级数，简单地说就是依 L^1 模收敛的小波级数．此外，用 L^1 模规范化的小波 $2^{nj}\psi_\lambda(x)$ 是特殊原子．

我们来证明这个定理．为了简化记号，用 $\mathscr{B}$ 表示使得 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha(\lambda)|2^{-nj/2}$ (记为 $\|f\|_B$) 有限的函数 $f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\psi_\lambda(x)$ 的 Banach 空间．

这个条件与 (7.6) 的等价性将证明这个定义不依赖于所应用的小波基．

第一点说明是：C^1 中具有紧支集的、积分值为零的函数属于 $\mathscr{B}$. 这个计算是直接的，留给读者去做．特别地 $F\subset\mathscr{B}$，并且这个包含关系是连续的．因此，直接得到：若 $a(x)\in F$，则函数 $\delta^{-n}a(\delta^{-1}(x-x_0))(\delta>0,\ x_0\in\mathbb{R}^n)$ 定义了 $\mathscr{B}$ 的一个有界集．最后，$\sum_0^\infty\lambda_j a_j(x)$ 定义了 $\mathscr{B}$ 中的函数，其中 $a_j(x)$ 是由上述法则构造的，并且 $\sum_0^\infty|\lambda_j|<\infty$．这就证明了 (7.7) $\Rightarrow$(7.8).

小波 $2^{nj/2}\psi_\lambda(x)$ 一旦用 L^1 模规范化了，它就是特殊原子．因而

(7.8) $\Longrightarrow$ (7.6) 是平凡的.

我们要处理定理 10 的微妙部分了. 即所有特殊原子都是极特殊原子按模收敛的级数. 为此, 只需假设问题中的特殊原子满足 (7.4) 和 (7.5).

用 ψ 表示 C^1 中的实值径向函数, 它支在单位球内并且不恒等于零, 令 $\psi_t(x)=t^{-n}\psi\left(\frac{x}{t}\right)(t>0)$. 记 Q_t 为用 ψ_t 作卷积的算子, 则我们可以使用 Calderon 等式

$$f=\int_0^\infty f*\psi_t*\psi_t\frac{dt}{t}\quad (f\in L^2(\mathbb{R}^n))\tag{7.9}$$

(只要乘一个正常数以使 ψ 规范化). Calderon 等式来自 $\int_0^\infty(\hat{\psi}(t\xi))^2\frac{dt}{t}=1(\xi\neq 0)$.

要做的第一件事是注意到: 若 f 满足 (7.4) 和 (7.5), 那么 $N_\psi(f)=\int_0^\infty\int_{R^n}|f*\psi_t(x)|dx\frac{dt}{t}$ 是有限的. 又设 $w(x,t)=f*\psi_t(x)$, 则由 (7.9) 知 $f(x)=\int_0^\infty\int_{R^n}\psi_t(x-y)w(y,t)dy\frac{dt}{t}$. $f(x)$ 作为$\psi(x)$的平移和展缩的平均而出现, 再将这个二重积分变成级数, 就得到了形为 $\psi_{t_j}(x-y_j)$ $(t_j>0,\ y_j\in\mathbb{R}^n)$ 的极特殊原子分解.

下面就是这个分解的细节.

引理 14 设函数 ψ 满足

$$|\psi(x)|\leqslant C_0(1+|x|)^{-n-1},\quad \int_{R^n}\psi(x)dx=0,$$

$$\|\psi(x-y)-\psi(x)\|_{L^1(dx)} \leqslant C_0|y| \quad (|y| \leqslant 1),$$

则只要 $a(x)$ 满足 (7.4) 和 (7.5), 便有

$$N_\psi(a)=\int_0^\infty \|Q_t(a)\|_1 \frac{dt}{t} \leqslant C_1, \tag{7.10}$$

其中，C_1 仅依赖于 C_0 和维数 n.

我们首先用特殊原子的正则性及函数 ψ 的振动性来控制 $\int_0^1 \|Q_t a\|_1 \frac{dt}{t}$ ，设 $\omega(y)=\|a(x)-\mathrm{a}(x-y)\|_{L^1(dx)}$. 当 $|y| \geqslant 1$ 时，有 $\omega(y) \leqslant 2$，而 $\int_{|y| \leqslant 1} \omega(y)|y|^{-n} dy \leqslant 1$.

然后，从 $Q_t a(x)=\int(a(x-y)-a(x))\psi_t(y)dy$ 知 $\|Q_t a\|_1 \leqslant \int \omega(y)|\psi_t(y)|dy$. 最后，有

$$\int_0^1 |\psi_t(y)| \frac{dt}{t} \leqslant \frac{C_2}{|y|^n} \quad (|y| \leqslant 1)$$

和

$$\int_0^1 |\psi_t(y)| \frac{dt}{t} \leqslant \frac{C^2}{|y|^{n+1}} \quad (y \geqslant 1),$$

这一切就给出

$$\int_0^1 \|Q_t a\|_1 \frac{dt}{t} \leqslant C\|a\|_1 + C\int_{|y| \leqslant 1} \omega(y)|y|^{-n} dy \leqslant 2C.$$

再考虑 $\int_1^\infty \|Q_t a\|_1 \frac{dt}{t}$，这时，在某种意义上，$\psi$ 的作用反过来了，写出

$$Q_t a(x) = \int \psi_t(x-y)a(y)dy = t^{-n}\int \psi(t^{-1}(x-y))a(y)dy,$$

以及

$$\|Q_t a\|_1 = t^n \int |Q_t a(tx)|dx.$$

用 $\frac{1}{t}$ 代替 t 作变量替换，这样，计算 $\int_1^\infty \|Q_t a\|_1 \frac{dt}{t}$ 就变成计算

$$\int_0^1 \left\| \int (\psi(x-ty)-\psi(x))a(y)dy \right\|_{L^1(dx)} \frac{dt}{t}.$$

设 $\theta(y) = \|\psi(x-y)-\psi(x)\|_1$，则有 $\int_0^1 \theta(ty)\frac{dt}{t} \leqslant C\log(2+|y|)$，由此，就可以用

$$C\int |a(y)|\log(2+|y|)dy$$

控制

$$\int_0^1 \|\psi(x-ty)-\psi(x)\|_{L^1(dx)} |a(y)|dy\frac{dt}{t}.$$

下面是我们需要的第二个结果.

引理 15 设 E 是一个 Banach 空间(它的模记为 $\|\cdot\|$), $A\subset E$ 是一个有界集. 假设存在一个局部紧的空间 Ω, 使得对任意 $x\in E$, 都有表达式

$$x=\int_{\Omega} f(\omega)d\mu(\omega), \tag{7.11}$$

其中, $f:\Omega\to A$ 是连续函数, 而 μ 是一个实值或复值的 Radon 测度, 它的全测度 $\|\mu\|\leqslant C_0\|x\|$. C_0 是一个常数, 则对所有 $x\in E$, 存在分解式

$$x=\sum_0^{\infty}\lambda_j a_j,\ a_j\in A, \tag{7.12}$$

其中

$$\sum_0^{\infty}|\lambda_j|\leqslant 2C_0. \tag{7.13}$$

事实上, 因为 $f:\Omega\to A$ 是有界连续函数, 所以可以用 Riemann 和代替积分 $\int_{\Omega} f(\omega)d\mu(\omega)$. 这就导致 $x=\sum_0^{\infty}\lambda_j a_j+y$, 其中 $\sum_0^{\infty}|\lambda_j|\leqslant C_0$, $\|y\|\leqslant\frac{1}{2}\|x\|$. 为得到(7.12), 只需迭代这个分解.

再回到分解特殊原子成为极特殊原子这个问题上. 设 $f(x)$ 满足(7.4)与(7.5), 则从引理 14 得出 $\iint_0^{\infty}|w(x,t)|dx\frac{dt}{t}\leqslant C$. 这就给 Calderon 恒等式以如下解释. 设 Ω 是上半空间 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, 用 $d\mu(\omega)$ 表示测度 $w(x,t)dx\frac{dt}{t}$, 我们已得到对它全测度的控制

了．(7.11) 中的函数 $f(\omega)$ 是 $t^{-n}\psi(t^{-1}(x-y))$，把它看成是从 Ω 到 $\mathscr{B}$ 内的映射，而 $\omega=(t,\ y)\in\Omega$. f 的连续性是因为 C^1 类中有紧支集，且积分为零的函数属于 $\mathscr{B}$. 由此就能得到所要的 $\mathscr{B}$ 中模的估计．最后，A 正好就是所有函数 $t^{-n}\psi(t^{-1}(x-y))$ $((t,\ y)=\omega\in\Omega)$ 的集合．

我们来把定理 10 证完．容易适当地选择 ψ. 例如，在一维时，可以选择 ψ 如下：当 $0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$ 时，$\psi(x)=1$；当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，$\psi(x)=-1$；当 $x\notin[0,\ 1)$ 时，$\psi(x)=0$. 这样，上述推理仍然有效．从而，我们借助 G. de. Souze 和 O. Neil 的“特殊原子”得到了 $B_1^{0,\ 1}$ 函数的分解．

在模的平移和展缩不变这点上，空间 $B_1^{0,\ 1}$ 很像空间 $L^1(\mathbb{R}^n)$. 在定义 $B_1^{0,\ 1}$ 的等价模中，我们特意选择了 (7.7) 的原子分解所得到的模．这样，若 $f\in B_1^{0,\ 1}$，设 $g(x)=t^nf\ (tx+x_0)$ $(t>0,\ x_0\in\mathbb{R}^n)$，则 $\|g\|=\|f\|$. 关于 $B_1^{0,\ 1}$ 的第二点说明是，包含关系 $\mathscr{D}_0\subset B_1^{0,\ 1}$ 成立，其中 $\mathscr{D}_0$ 是积分值为零的试验函数构成的拓扑向量空间．因此，$B_1^{0,\ 1}$ 的最小性质就是：$B_1^{0,\ 1}$ 是包含 $\mathscr{D}_0$ 的，并且模具有 L^1 模所具有的齐性的最小 Banach 空间．若用 $\mathscr{D}$ 代替 $\mathscr{D}_0$，则最小 Banach 空间是 $L^1(\mathbb{R}^n)$.

这个最小性质来源于定理 10. 事实上，只要在 $\mathscr{D}_0$ 中选择 ψ 就行了．

最后，我们提到但不证明 $B_1^{0,\ 1}$ 与单峰代数之间的联系．一个函数 f 属于 Gauss 单峰代数，当且仅当它的所有 $|\alpha|=n$ 阶导数 $\partial^\alpha f$ 属于 $B_1^{0,\ 1}$. 这个性质容易从 Besov 空间的小波系数的模的刻划得到．第 10 节将给出这个刻划，建议读者参阅那里．

8. Bloch 空间 $B_\infty^{0,\ \infty}$

最初，Bloch 空间被定义为上半平面 $I_mz\geqslant0$ 上满足

$\sup y\ |f'(z)|<\infty$ 的全纯函数 $f(z)$ 的空间．同样，上半平面全纯函数 $g(z)$ 属于 Bergman 空间，当且仅当 $\iint_{\{y>0\}}|g'(z)|dxdy<\infty$. 由

$$\int_{R^n} f\overline{g}dx=2\iint f'(x+iy)\overline{g}'(x+iy)ydxdy$$

定义 Bloch 空间与 Bergman 空间的共轭性时，可以验证 Bergman 空间的共轭空间是 Bloch 空间．

这些空间与它们的实对应相差不远．事实上，设 H 是 Hilbert 变换，$P=\frac{I+iH}{2}$ 就是从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 的正交投影算子．

容易证明，P 可以延拓成从 $B_1^{0,1}(\mathbb{R})$ 到 Bergman 空间上的映上的线性连续算子．确切地说，每个 $B_1^{0,1}$ 中的函数可以唯一地写成 $f=g+\overline{h}$, 其中，g 和 h 属于上半面的 Bergman 空间．f 与 g 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 与 $\hat{g}$ 有以下关系：当 $\xi\geqslant 0$ 时，$\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)$; 当 $\xi<0$ 时，$\hat{g}(\xi)=0$.

回到“实”的空间 $B_1^{0,1}$, 并研究它的共轭．若 $\alpha(\lambda)$ 是分布 S 的小波系数，而 $\beta(\lambda)$ 是 f 的小波系数，则 $\langle S,\overline{f}\rangle=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha(\lambda)\beta(\lambda)$. 这样，就可以用小波级数研究共轭性．如果记 $B_1^{0,1}$ 的共轭为 $B_\infty^{0,\infty}$ (在研究 Besov 空间时，将说明这种记法是有理由的), 那么分布 $S\in B_\infty^{0,\infty}$ 是由加在 S 的小波系数上的条件 $|\alpha(\lambda)|\leqslant C2^{-nj/2}(\lambda\in\Lambda_j)$ 来刻划的．故分布 $S\in B_\infty^{0,\infty}$ 的小波级数有如下形式：

$$S=\sum_{\varepsilon\in E}\sum_j\sum_k c(\varepsilon,j,k)\psi^\varepsilon(2^jx-k),$$

其中 $|c(\varepsilon,j,k)|\leqslant c$, 而 ψ^ε 是 $(2^n-1$ 个$)$ 用于构造小波基的解析小波．

在一维时，分布 $S\in B_{\infty}^{0,\infty}$ 与 Zygmund 类函数的导数重合．下面是说明这一点的有趣的方法．

Zygmund 类函数 $F(x)$ 是用 $|F(x+h)+F(x-h)-2F(x)|\leqslant Ch$ ($x\in\mathbb{R}$, $h>0$) 刻划的．我们引入一个特殊原子 $a(t)$; 在 $[x-h, x)$ 上，它取值 $\frac{1}{2h}$ ；在 $[x, x+h)$ 上，它取值 $-\frac{1}{2h}$ ．由分部积分，得到 $|\langle F', a\rangle|\leqslant\frac{C}{2}$ ．既然这些特殊原子(由凸组合以及用模为 1 的系数去作乘法)生成空间 $B_1^{0,1}$，我们就知道了 $B_1^{0,1}$ 的共轭与 Zygmund 类的函数的导数相重合．

9. 线性连续算子 T: $B_1^{0,1}\to B_1^{0,1}$ 的刻划

设 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是由正则性指标 $r\geqslant1$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 多分辨率分析构造出来的小波正交基．重要的是能够简单地给出线性连续算子 T: $B_1^{0,1}\to B_1^{0,1}$ 的相应矩阵 $M=(\tau(\lambda, \lambda'))_{(\lambda,\lambda')\in\Lambda\times\Lambda}$ 的特征刻划．

实际上，$\tau(\lambda, \lambda')=(T\psi_{\lambda'}, \psi_\lambda)=\langle T\psi_{\lambda'}, \bar{\psi}_\lambda\rangle$．而这个刻划是由以下命题给出的．

命题 6 算子 T 是 $B_0^{0,1}$ 上的连续算子，当且仅当存在常数 C, 使得对所有 $\lambda'\in\Lambda$, 有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\tau(\lambda,\lambda')|2^{-nj/2}\leqslant C2^{-nj'/2}. \tag{9.1}$$

自然，λ 与 j 的关系是 $\lambda\in\Lambda_j$. 同样，$\lambda'\in\Lambda_{j'}$.

该命题的证明是直接的．这是因为 (9.1) 表示：对任意 $\lambda'\in\Lambda$, $T(2^{nj'/2}\psi_{\lambda'})\in B_1^{0,1}$, 并且它的模不超过 C, 然而，函数 $2^{nj'/2}\psi_{\lambda'}$ 由凸组合及用模为 1 的复数作乘法生成了 $B_1^{0,1}$.

在第Ⅷ章第 3 节，将用到下面的推论．

推论：设算子 T 和它的共轭算子 T^* 都在 $B_1^{0,1}$ 上有界，则 T 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 连续的.

事实上，我们有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\tau(\lambda,\ \lambda')|2^{-nj/2}\leqslant C2^{-nj'/2},$$

以及同样有

$$\sum_{\lambda'\in\Lambda}|\tau(\lambda,\ \lambda')|2^{-nj'/2}\leqslant C2^{-nj/2}.$$

这样就可以应用 Schur 引理，进而归结为 T 的矩阵 M 在 $l^2(\Lambda)$ 上的连续性. 这是第Ⅷ章的内容，建议读者参考该处.

10. 小波与 Besov 空间

对齐次或非齐次 Besov 空间的介绍可以把第 4 节以来得到的特殊结论综合成一个有内在联系的整体. Besov 空间 $B_p^{s,q}$ 是 Sobolev 空间 $H^s=B_2^{s,2}$ 和 Hölder 空间 $C^s=B_\infty^{s,\infty}$ 的一般化.

首先，用小波系数的模刻划非齐次 Besov 空间 $B_p^{s,q}$（它的定义在第Ⅰ章第 9 节）.

我们从正则性指标 $r\geqslant 1$ 的多分辨率分析出发. 用 ψ_λ 表示相应的小波，它的指标 $\lambda\in\Lambda$. 假设 $\Lambda_j=2^{-j-1}\mathbb{Z}^n\backslash 2^{-j}\mathbb{Z}^n$，则 Λ_j 构成了 Λ 的一个分解. 因而小波 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 构成了 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补 W_j 上的一组正交基.

设 $|s|<r$，以下我们总假设这个条件成立. 这时，空间 $B_p^{s,q}$ 由条件 $E_0(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $\|D_jf\|_p\leqslant\varepsilon_j2^{-js}$ 刻划，其中 $\varepsilon_j\in l^q(\mathbb{N})$. 我们用下面的命题来转换这些条件.

命题 7 存在两个常数 $C' \geqslant C > 0$，使得对任意 $p \in [1, +\infty]$，$j \in \mathbb{Z}$，以及对任意属于 W_j 的有限和 $f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x)$，有

$$C \| f \|_p \leqslant 2^{nj/2} 2^{-nj/p} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\alpha(\lambda)|^p \right)^{1/p} \leqslant C' \| f \|_p .$$

这个结果完全可以用第Ⅱ章第 5 节引理 9 的同样方法证明.

由此结果，便立即得到 $B_p^{s,q}$ 的以下刻划：所有函数 $f \in B_p^{s,q}$ 都是如下级数的和：

$$f(x) = \sum_k \beta(k) \varphi(x-k) + \sum_{j \geqslant 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x),$$

它满足

$$\left(\sum_k |\beta(k)|^p \right)^{1/p} < \infty, \tag{10.1}$$

以及

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\alpha(\lambda)|^p \right)^{1/p} = 2^{-sj} 2^{-nj(1/2-1/p)} \varepsilon_j, \tag{10.2}$$

而 $\varepsilon_j \in l^q(\mathbb{N})$.

齐次 Besov 空间的情形是类似的. 这时用 $j \in \mathbb{Z}$ 代替 $j \in \mathbb{N}$，这样函数 φ 就不参与小波分解了. 我们曾称 φ 为“小波的父亲”.

我们将用 Littlewood－Paley 分解 $I = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j$ 定义齐次 Besov 空间，其中 Δ_j 是与 ψ_j 作卷积的算子(本章第 4 节引理 8).

当 $s < \dfrac{n}{p}$ 或 $s = \dfrac{n}{p}$ 但 $q=1$ 时，齐次 Besov 空间 $\dot{B}_p^{s,q}$ 是函数空间，这表明 $\dot{B}_p^{s,q}$ 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的向量子空间，并且包含关系

$\dot{B}_p^{s,q} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$是连续的．一个分布属于 $\dot{B}_p^{s,q}$，当且仅当

$$\text{依拓扑 } \sigma(\mathscr{S}, \mathscr{S}'), \text{ 部分和 } \sum_{-m}^{m} \Delta_j(f) \text{ 收敛到 } f\text{；} \tag{10.3}$$

$$\text{序列 } \varepsilon_j = 2^{sj} \|\Delta_j(f)\|_p \text{ 属于 } l^q(\mathbb{Z}). \tag{10.4}$$

例如，当 $s < \frac{n}{p}$ 时，恒等于 1 的函数不属于 $\dot{B}_p^{s,q}$，尽管这时对所有的 $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta_j(1) = 0$.

当 $s = \frac{n}{p}$ 且 $q > 1$ 或 $s > \frac{n}{p}$ 时，$\dot{B}_p^{s,q}$不再是函数空间；这时，恒等于 1 的函数属于$\dot{B}_p^{s,q}$，但是它被视为与恒等于零的函数一样．设 $\sigma = s - \frac{n}{p}$，我们把$\dot{B}_p^{s,q}$ 定义为齐次 Hölder 空间 $\dot{C}^\sigma$ 的一个子空间．注意到 $\|\Delta_j(f)\|_\infty \leqslant C 2^{nj/p} \|\Delta_j(f)\|_p \leqslant \varepsilon_j 2^{-j}$，就验证了这个包含关系．设 $m \in \mathbb{N}$ 是 σ 的整数部分，$\dot{B}_p^{s,q}$ 是缓分布 f 模去次数 $\leqslant m$ 的多项式的空间，其中 f 满足：$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j(f)$ 在商空的收敛意义上成立，并且 $\|\Delta_j(f)\|_p = 2^{-js}\varepsilon_j$，其中 $\varepsilon_j \in l^q(\mathbb{Z})$.

当 $\frac{n}{p} \leqslant s < r$ 时，$f \in \dot{B}_p^{s,q}$ 的小波系数的确有意义，这是因为对 $|\alpha| \leqslant r$ 的 α, $\int x^\alpha \psi_\lambda(x) dx = 0$ 成立，而 $m < r$.

最终，$\dot{B}_p^{s,q}$的元f是满足

$$2^{js} 2^{nj(1/2-1/p)} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\alpha(\lambda)|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \in l^q(\mathbb{Z}) \tag{10.5}$$

的小波级数 $\sum \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x)$ 的和．

$f \in \dot{B}_p^{s,q}$ 的小波级数的收敛性要求重正规化．事实上，满足 $\lambda \in \Lambda_j (j \leqslant 0)$ 的小波 ψ_λ 是很平的，当 $s > n/p$ 时，它带有的小波系数

又以指数阶趋向于无穷．这个重正规化与在齐次 Hölder 空间的重正规化是一样的，请读者自己去做．

在结束本节之前，让我们考虑第Ⅲ章第 11 节的周期小波这一特殊情形．

级数 $\sum_{0}^{\infty}\alpha_m g_m(x)\in B_p^{s,q}$，当且仅当

$$2^{js}2^{j(1/2-1/p)}\left(\sum_{2^j}^{2^{j+1}}|\alpha_m|^p\right)^{1/p}\in l^q(\mathbb{N}). \tag{10.6}$$

显然，不再有此结果的齐次形式了．另外，我们总假设满足条件 $|s|<r$.

例如，设序列 $|\alpha_m|$ 是缓变的，即存在常数 C，使得当 $m\leqslant 2m'$ 或 $m'\leqslant 2m$ 时有 $|\alpha_m|\leqslant C|\alpha_{m'}|$．这样，当 $2^j\leqslant m<2^{j+1}$ 时，$|\alpha_m|\sim\omega_j$．条件(10.6)就变成了 $\varepsilon_j=2^{j(\frac{1}{2}+s)}\omega_j\in l^q(\mathbb{N})$．即这个特殊的小波级数是否属于 $B_p^{s,q}$ 与 p 无关．

确切地说，选 $\omega_j=2^{-\frac{j}{2}}j^{-\frac{1}{2}}(j\geqslant 1)$，则得到一族分布，对 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 及 $p>2$，它属于 $B_p^{0,q}$，而它们中的任何一个都不是 Radon 测度．

11. 全纯小波与 Botchkariev 定理

我们不知道是否存在函数ψ，它属于全纯 Hardy 空间 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$，又属于 Schwartz 类 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$，并且 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基．如果不对 ψ 加以速降性的要求，问题的回答就是显然的，这只要选 $\psi(x)=\dfrac{1}{2\pi ix}\,(e^{4\pi ix}-e^{2\pi ix})$ 就可以了．这个选择完全不适用于已知的应用．

我们放弃寻找有简单的小波结构的 $\mathbb{H}^2$ 的正交基，而追随 Botchkariev 的方法构造"双峰小波"．

这些"双峰小波"构成了 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基，并且是空间 $\mathbb{H}^p(\mathbb{R})$ $(0<p<\infty)$ 的一组无条件基．

下面就是这种构造的细节，从Littlewood－Paley小波基 $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j-k)$ 出发，我们记得它们构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基，而

$$\psi(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \text{并且}\ \psi\ \text{是实值的;} \tag{11.1}$$

$$\hat{\psi}(x)\ \text{支于}\ \frac{2}{3}\pi\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8}{3}\pi; \tag{11.2}$$

$$\psi(1-x)=\psi(x). \tag{11.3}$$

记 S: $L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ 是由 $(Sf)(x)=f(-x)$ 定义的同构，则小波 $\psi_{j,k}$ 的集合在 S 作用下是整体不变的．我们有

$$S(\psi_{j,k})=\psi_{j,k^*},\quad \text{其中}\quad k^*=-k-1.$$

这个小波基的整体对称性是从(11.3)得到的．

设 E 是由偶函数组成的 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间．则"双峰小波" $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,k}+\psi_{j,k^*})$ 构成了 E 的一组重要的正交基．

用 P: $L^2(\mathbb{R})\to\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 表示正交投影算子，它可以由 Fourier 变换定义如下:

$$(Pf)^\wedge(\xi)=\hat{f}\chi_+(\xi).$$

其中 $\chi_+(\xi)=\begin{cases}1 & (\xi\geqslant 0),\\ 0 & (\xi<0).\end{cases}$

这样，$\sqrt{2}P$: $E\to\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 就是保范同构．事实上，若 $f\in E$, f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 就是偶函数，它完全由它在 $(0,+\infty)$ 上的限制定义．

设 $P(\psi)=\mathscr{I}$．为计算 $\mathscr{I}$, 把 $\hat{\psi}(\xi)$ 写成 $\hat{\psi}(\xi)=e^{-i\xi/2}\omega(\xi)$ 是

方便的．其中 $\omega(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 是实值函数（事实上，在 Littlewood－Paley 小波这种特殊情形中，$\omega(\xi)\geqslant 0$）．因此，

$$\mathscr{I}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i(x-1/2)\xi}\,\omega(\xi)\,d\xi;$$ ξ 当限制到 $\xi\geqslant 0$ 时，在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}\right]$ 之外，$\omega(\xi)=0$；并且 ω 是无穷次可微的．由此得出：$\mathscr{I}(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，并且 $\overline{\mathscr{I}}(x)=\mathscr{I}(1-x)$.

定义

$$\mathscr{I}_{j,k}(x)=2^{j/2}\mathscr{I}(2^j x-k)\qquad (j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}),\tag{11.4}$$

则对 $k^*=-k-1$，有 $\mathscr{I}_{j,k^*}(x)=\overline{\mathscr{I}}_{j,k}(-x)$（注意到若 $f\in\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$，则 $\overline{f}(-x)$ 也属于 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$，$\overline{f}(-x)$ 的 Fourier 变换是 $\overline{\hat{f}}(\xi)$.

我们想证明下面的定理．

定理 11　函数 $\mathscr{I}_{j,k}+\mathscr{I}_{j,k^*}$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基，也是任意 $\mathbb{H}^p(\mathbb{R})$ $(0<p<\infty)$ 的一组无条件基．

显然，定理 11 的第一个结论可以从"双峰小波"的构造得出．

为了证明第二个结论，任意找一列 $\lambda(j,k)$ $(j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z})$，只要求 $|\lambda(j,\ k)|\leqslant C_0$．我们用

$$T(\mathscr{I}_{j,k}+\mathscr{I}_{j,k^*})=\lambda(j,\ k)(\mathscr{I}_{j,k}+\mathscr{I}_{j,k^*})$$

定义 T: $\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$，若能证明 T 是 $\mathbb{H}^p$ $(0<p<\infty)$ 上的有界算子，则就证完了第二个结论．

为了证明 T 在 $\mathbb{H}^p$ 上的连续性，我们再次使用第 Ⅶ 章的 Calderon－Zygmund 定理，更确切地说，再用这章第 3 节的命题 4.

在函数 $\mathscr{I}_{j,k}+\mathscr{I}_{j,k^*}$ 的双峰的情形，事情更简单．函数 $\mathscr{I}(x)$ 满足 $\mathscr{I}(x)=\mathscr{I}(1-x)$，这就导致 $\mathscr{I}_{j,k^*}(x)=\overline{\mathscr{I}_{j,k}(-x)}$.

我们来计算算子 T 的分布核 $T(x,\ y)$，它是

$$T(x,y)=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}\lambda(j,k)(\mathscr{I}_{j,k}(x)+\overline{\mathscr{I}_{j,k}}(-x))(\overline{\mathscr{I}_{j,k}}(y)+\mathscr{I}_{j,k}(-y)). \tag{11.5}$$

在展开乘积时，得到两个分布，分别记为 $T_1(x, y)$ 和 $T_2(x, -y)$，这两个分布定义了两个算子 T_1 和 T_2，容易验证 T_1 和 T_2 是满足命题 4 的条件的 Calderon－Zygmund 算子．

定理 11 证毕，现在我们给出上述结果的周期形式，用它可以证明 Wojtasczcyk 和 Botchkariev 的定理(〔237〕，〔20〕)．

回到 Littlewood－Paley 的小波基．用

$$g_{j,k}(x)=2^{j/2}\sum_{-\infty}^{\infty}\psi(2^jx+2^jl-k)\quad (j\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k<2^j) \tag{11.6}$$

定义周期小波．则序列 $1, g_{0,0}, g_{1,0}, g_{1,1}, g_{2,0}, g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}, \cdots$ 是 $L^2[0, 1)$ 的一组正交基．

此外，$g_{j,k}(x)$ 是实值的，它的图形关于 $x=k2^{-j}+2^{-j-1}$ 对称．

若 J: $L^2[0, 1]\to L^2[0, 1]$ 是用对称 $Jf(x)=f(1-x)$ 定义的酉算子，则 $Jg_{j,k}=g_{j,k^*}$，其中 $k^*=-k-1+2^j$. 换言之，$J(g_{0,0})=g_{0,0}$，$J(g_{1,0})=g_{1,1}\cdots$.

一个初等的计算表明，$g_{j,k}(x)=g_j(x-k2^{-j})$，其中

$$\begin{aligned} g_j(x)&=(2\pi)^{-1}2^{-j/2}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(2k\pi 2^{-j})e^{2k\pi ix}\\ &=(2\pi)^{-1}2^{-j/2}\sum_{-\infty}^{\infty}\omega(2k\pi 2^{-j})e^{2k\pi i(x-2^{-j-1})}. \end{aligned}$$

事实上，因为有 $\frac{1}{3}2^j\leqslant|k|\leqslant\frac{4}{3}2^j$，这个和仅由有限项组成．

我们用 g_j 定义 h_j 如下：

$$h_j(x)=(2\pi)^{-1}2^{-j/2}\sum_{0}^{\infty}\omega(2k\pi 2^{-j})e^{2k\pi i(x-2^{-j-1})} \tag{11.7}$$

因此 $h_j(2^{-j}-x)=\overline{h}_j(x)$.

用 $\mathbb{H}^2[0,1]$ 表示由负指标的 Fourier 系数为零的 $L^2[0,1]$ 函数构成的子空间．换句话说，$f\in\mathbb{H}^2[0,1]$ 是指存在 Taylor 级数 $F(z)=\sum_0^\infty C_k z^k$，使得 $\sum_0^\infty |C_k|^2<\infty$，并且当 $z=e^{2\pi it}(0\leqslant t\leqslant 1)$ 时，有 $f(t)=F(e^{2\pi it})$．我们也用 $\mathbb{H}^2$ 上表示在 $|z|<1$ 上满足

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^1 |F(re^{2\pi it})|^2 dt<\infty \tag{11.8}$$

的全纯函数 $F(z)$ 所组成的 Hilbert 空间．

用 $G_0=1$，$G_1(x)=e^{2\pi ix}$，及

$$G_m(x)=\frac{1}{\pi}\,2^{-j/2}\sum_0^\infty \omega(2k\pi 2^{-j})\cos\left(2k\pi\left(1+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)e^{2k\pi ix} \tag{11.9}$$

$(m=2^{-1}+l+1,\ 0\leqslant l<2^{j-1})$ 定义 $\mathbb{H}^2$ 中的一列函数 $G_m(m\in\mathbb{N})$.

换句话说，$G_m=P(g_{j,k}+g_{j,k^*})$，而 P: $L^2\to\mathbb{H}^2$ 是正交投影算子．

定理 12 序列 $G_m(m\in\mathbb{N})$ 是每个 $\mathbb{H}^p(0<p<\infty)$ 的无条件基，并且是代数 $A(D)$ 的 Schauder 基．

代数 $A(D)$ 是由在单位开圆盘上全纯、在单位闭圆盘连续的函数组成．若 $F(z)\in A(D)$，则 $f(t)=F(e^{2\pi it})$ $(t\in\mathbb{R})$ 是在全直线上连续的周期函数，并且它的所有负指标的 Fourier 系数为零(反之亦然)．

第一个结论的证明是已给出的非周期情形证明的适当修改(留给读者去做)．

第二个结论的证明有新的令人感兴趣的东西．

对 $q\in\mathbb{N}$，令 $E_q: L^2[0, 1]\to L^2[0, 1]$表示由

$$E_q(f)=(f, 1)1+(f, g_{0,0})g_{0,0}+\sum_{1\leq j\leq q}\sum_{0\leq k<2^j}(f, g_{j,k})g_{j,k}$$

定义的 f 的小波级数的部分和算子.

已知(第Ⅲ章定理 5)：若 $f(x)$是周期为 1 的整个实直线上的连续函数，则 $E_q(f)$一致收敛到 f.

因此，我们考虑算子 $\sigma_q: \mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$，它的定义是

$$\sigma_q(f)=(f, 1)1+\cdots+(f, G_{2q})G_{2q}.$$

使用关系式 $G_m=P(g_{j,k}+g_{j,k^*})$，$g_{j,k^*}=J(g_{j,k})$，就得到

$$\sigma_q(f)=PE_q(f)+PE_q(Jf)-(f, 1)1. \tag{11.10}$$

为了证明当 q 趋向于无穷时，$\sigma_q(f)$一致收敛到 f，只需对 f 是三角多项式这种情形加以验证(三角多项式即函数 $e^{2l i\pi x}(l\in\mathbb{N})$ 的有限线性组合)，同时要证明算子 $\sigma_q: A(D)\to A(D)$的模是一致有界的.

验证第一件事十分简单.事实上，当 f是三角多项式时，由(11.9)，G_m 的频率就满足 $\frac{2^j}{3}\leq|k|\leq\frac{4}{3}2^j$，只要 m 充分大，就有 $(f, G_m)=0$.

第二个验证依赖于下面的命题所述的性质，该性质并不显然.

命题 8 在由实直线上周期为 1 的函数组成的 Banach 空间中，交换子$[E_q, P]$是一致有界的.

我们先承认这个结果，把定理 12 证完，若 $f\in A(D)$，则

$$PE_q(f)=E_qP(f)-[E_q,P]f=E_q(f)-[E_q,P]f,$$

因此，存在常数 C，使得对 $f\in A(D)$ 有

$$\|PE_q(f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty.$$

下面考虑(11.10)中的右边第二项．我们有 $Jf(x)=\sum_0^\infty C_k e^{-2k\pi ix}$，因此 $PJf=c_0$，故 $PE_q(Jf)=E_qPJ(f)=[E_q,\ P]Jf=c_0-[E_q,\ P]Jf$；从而对 $f\in A(D)$，

$$\|PE_q(Jf)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty.$$

(11.10)中的最后一项不需要任何证明．为了证完定理 12，应该考虑任意的部分和

$$S_N(f)=\sum_0^N (f,\ G_m)G_m. \tag{11.11}$$

我们应该证明，算子 S_N: $A(D)\to A(D)$ 的模一致有界．已经知道：当 $N=2^q$ 时，$S_N=\sigma_q$；当 $2^q<N\leqslant 2^{q+1}$ 时，我们要控制误差项 $S_N-\sigma_q$；使用函数 G_m（"双峰小波"）的局部性这一优点，就有

$$\left\|\sum_{2^q\leqslant m\leqslant 2^{q+1}} |G_m(x)|\right\|_\infty \leqslant C2^{q/2}, \tag{11.12}$$

其中，C 是一个常数．由此得出：当 $2^q<N\leqslant 2^{q+1}$ 时，

$$\left\|\sum_{2^q}^N (f,\ G_m)G_m\right\|_\infty \leqslant C \sup_{2^q\leqslant m\leqslant 2^{q+1}} \|G_m\|_1 \left\|\sum_{2^q}^{2^{q+1}} |G_m|\right\|_\infty \|f\|_\infty \leqslant C'.$$

定理 12 证毕．只需补证命题 8.

使用第 II 章的等式(11.1)，周期化后，它可以写成

$$E_q=S_qS_q^*+M_q\Delta_q+\Delta_qM_q^{-1},$$

其中，S_q 是一个不必显式写出的卷积算子；而 M_q 是用 $\exp(2\pi i2^q x)$ 逐点作乘法的算子；Δ_q 是一个卷积算子，它满足 $\Delta_q(e^{i\xi x})=\eta(2^{-q}\xi)\cdot$

$e^{i\xi x}(\xi\in 2\pi\mathbb{Z})$，而 $\eta(\xi)$ 是一个 $\mathscr{D}$ 中支在 $\left[-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right]$ 上的函数.

因此，$\Delta_q P=P\Delta_q=0,\ PM_q\Delta_q=M_q\Delta_q$，同样地，$P\Delta_q M_q^{-1}=0$，$\Delta_q M^{-1}P=\Delta_q M_q^{-1}$.

最后，$E_qP-PE_q=\Delta_q M_q^{-1}-M_q\Delta_q$，这两个算子中的每一个都是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子.

上述证明不需变动就可用到在开圆盘 $|z|<1$ 全纯、闭圆盘 $|z|\leqslant 1$ 上属于 C^r 类的全纯函数的代数 $A_r(D)$ 上. $G_m(m\in\mathbb{N})$ 是 $A_r(D)$ 的一组 Schauder 基.

12. 结 论

注意到：所有结果都显示，小波 $\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda_j)$ 好象是算子 $\partial^\alpha(|\alpha|<r)$ 的特征函数，而相应的特征值为 $2^{|\alpha|j}$; 这样就综述了本章的结果. 同样地，一切也显得小波似乎从 Haar 系的强正交性那里受益. 即若 $f\in V_j$，而 F 是无穷次可微的函数时，$\psi_\lambda(\lambda\in\Lambda_j)$ 是“几乎正交”于 $F(f)$ 的. 我们用一个例子来说明这点. 为了计算 $\sum\alpha_\lambda\psi_\lambda(x)$ 在 $\dot{L}^{4,s}(s\in\mathbb{R})$ 中的模，我们对这个级数作 s 阶分数次微分，考虑到上述有启发性的说明，就得到 $\sum\alpha_\lambda 2^{js}\psi_\lambda(x)$. 接着计算 $g(x)=\sum\alpha_\lambda 2^{js}\psi_\lambda(x)$ 在 L^4 中的模，我们把它写成 $\int g^2(x)\bar{g}(x)^2dx$. 这又导致积分

$$I(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)=\int\psi_{\lambda_1}(x)\psi_{\lambda_2}(x)\bar{\psi}_{\lambda_3}(x)\bar{\psi}_{\lambda_4}(x)dx.$$

由“强正交性”，除非 $\lambda_1=\lambda_3$ 且 $\lambda_2=\lambda_4$ 或 $\lambda_1=\lambda_4$ 且 $\lambda_2=\lambda_3$ 外，$I(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)=0$. 最后，为计算积分 $\int|\psi_\lambda(x)|^2\ |\psi_{\lambda'}(x)|^2dx$ 的值，考虑到小波的局部性，用 $2^{nj}\chi_\lambda(x)$ 代替 $|\psi_\lambda(x)|^2$，其中 $\chi_\lambda(x)$ 是与 ψ_λ 有

关方体的特征函数．那么，除非 $Q(\lambda)\subset Q(\lambda')$ 或 $Q(\lambda')\subset Q(\lambda)$，有 $\int|\psi_\lambda(x)|^2\ |\psi_{\lambda'}(x)|^2dx=0$；而在那两种情形，该积分变为 $\inf(|Q(\lambda)|,\ |Q(\lambda)|)2^{n(j+j')}$.

这个富有启发性的考虑恰好给出了定理 2 所述的结论．

参考文献

1. L. Ahlfors, Zur theorie der Uberlagerungsflaschen, Acta Math., **65**, (1935), 157–194.
2. J. Arsac, Transformation de Fourier et théorie des distributions, Dunod, (1961).
3. P. Auscher, Wavelets on chord–arc curves, to be published in《Ondelettes, Méthodes Temps–Fréquence et Espaces des Phases》, J. M. Combes, A. Grossmann and P. Tchamitchian editors, C.P.T., C.N. R.S.–Luminy, Case 907, 13288–Marseille–Cedex 9.
4. J.P. Aubin, Approximation of Elliptic boundary–value problems, Pure and. Applied Mathematics, Krieger Publishing Co., Huntington, N. Y., (1980).
5. A. Baernstein II and E.T. Sawyer, Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbf{R}^n)$, Memoirs of the A.M.S., **53**, (1985).
6. R. Balian, Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique C. R. Acad. Sci. Paris, t. 292, Série II, 1357–1361, (1981).
7. E. Balslev, A. Grossmann and T. Paul, A characterization of dilation analytic operators, Annales I.H.P., Physique théorique, **45**, (1986).
8. G. Battle, A block spin construction of ondelettes, Part I: Lomarié functions, Comm. Math. Phys., **110**, 601–615, (1987).
9. G. Battle, A block spin construction of ondelettes, Part II: the QFT connection, Comm. Math. Phys., **114**, 93–102, (1988).
10. G. Battle and P. Federbush, Ondelettes and phase cluster expansion, a vindication., Comm. Math. Phys., **109**, 417–419, (1987).
11. R. Beals, Characterization of pseudo–differential operators and applications, Duke Math. J., **44**, (1977), 45–57.
12. A. Benedek, A. Calderon and R. Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **48**, (1962), 356–365.
13. E. Berkson, On the structure of the graph of the Franklin analyzing wavelet. Proc. of the special year in modern analysis, (Urbana 1986–1987), to be published by Cambridge University Press, (1989).
14. O.V.Besov, Théorèmes de plongement des espaces fonctionnels, Congrès int. des math., Nice, (1970), Vol II, 467–473.
15. A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebras,

Ann. Inst. Fourier **14**, (1962), 1−32.

16. J. M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularltès pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Scient. E.N.S., **14**, (1981), 209−246.
17. J.M. Bony, Propagation et interaction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non−linéaires, Proceedings of the International Congiess of Mathematicians,(1983), Warszawa, 1133−1147.
18. J.M. Bony, Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Sém. E.D.P., 1979/80, n° 22, 1981/82, n° 2 et 1983/84, n° Centre de Mathématique, Ecole Polytechnique, 91128−Palaiseau, France.
19. G. Boole, On the comparison of transcendents with certain applications to the theory of definite integrals, Philosophical transactions of the Royal Society, **147**, (1857), 745−803.
20. S.V. Botchkariev, Existence of bases in the space of analytic functions and some properties of the Franklin system, Mat. Sbornik., **98**, (1974), 3−18.
21. G. Bourdaud−Sur les opérateurs pseudo−différentiels à coefficients peu réguliers, Université Paris VII, Mathématique, tour 45−55, 5ème étage, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
22. G. Bourdaud, Réalisations des Espaces de Besov homogènes, A paraître aux Arkiv f. Math. (1988).
23. G. Bourdaud, Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes, manuscripta math., **60**, (1988), 93−103.
24. J. Bourgain, On the L^p−bounds for maximal functions associated to convex bodies, Israel J. Math. **54**, (1986), 307−316.
25. J. Bourgain, Geometry of Banach spaces and Harmonic Analysis, Proc. Int. Congress Math., Berkeley, C., (1986), 871−878.
26. J. Bourgain, Extension of a result of Benedek, Calderon and Panzone, Ark. for Mat., **22**, (1984), 91−95.
27. J. Bourgain, Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, (preprint).
28. J. Bourgain, On square functions on the trigonometric system, (preprint).
29. J. Bourgain, Vector−valued singular integrals and the H^1−BMO duality, Probability theory and harmonic analysis, J. A. Chao and W. A. Woyczynski, editors, Marcel Dekker, (1986), New York, 1−19.
30. D.L. Burkholder, A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach space valued functions, Conference

in Harmonic Analysis in Honor of Zygmund,(1982), The University of Chicago.

31. D.L. Burkholder, Martingale theory and harmonic analysis in euclidean spaces, Proc. Symp. Pure Math., Part 2, (1979), 283−301.
32. D.L. Burkholder, Martingales and Fourier analysis in Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics, Springer−Verlag, **1206**, (1986). 61−108.
33. D. Burkholder, A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, The Annals of Probability, Vol. 9, 6, (1981), 997−1011.
34. D. Burkholder, R. Gundy and M. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. A.M.S., **157**, (1971), 137−153.
35. A. P. Calderon, Intermediate spaces and interpolation, the complex method Studia Math., **24**, (1964), 113−190.
36. A. P. Calderon, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Journ. Math., **80**, (1958), 16−36.
37. A.P. Calderon, Algebra of singular integral operators, Proc. of Symp. in Pure Mathematics, X, A.M.S.(1967).
38. A.P. Calderon, Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators−Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **74**, (1977), 1324−1327.
39. A.P. Calderon, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, (1978), 85−96.
40. A.P. Calderon, Boundary value problems for the Laplace equation in Lipschitzian domains, Recent progress in Fourier analysis, North−Holland Mathematics Studies, **111**, (1983), 33−49, edited by I. Peral and J.L. Rubio de Francia.
41. A.P. Calderon and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Adv. in Math., **16**, (1975), 1−63 and **24**, (1977), 101−171.
42. A.P. Calderon and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, Acta Math., Vol. **88**, (1952), 85−139.
43. A.P. Calderon and A. Zygmund, Singular integrals and periodic functions, Studia Math., **14**, (1954), 249−271.
44. A.P. Calderon and A. Zygmund, On Singular integrals, Amer. Journ, Math., **78**, (1956), 289−309 and 310−320.
45. A. P. Calderon and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math. Soc., **84**, (1957), 901−921.
46. L. Carleson, An explicit unconditional basis in H^1, Bull. des Sciences

Math., **104**, (1980), 405−416.

47. L. Carleson, Interpolation of bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math. **76**, (1962), 547−559.
48. L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Analyse Harmonique, Orsay, (1975), Preprint $n°$ 164.
49. A. Chang, Two remarks about H^1 and BMO on the bidisc, Conference on harmonic analysis in Honor of Antoni Zygmund, The University of Chicago, March 23−28, 1981.
50. A. Chang and Z. Ciesielski, Spline characterizations of H^1, Studia Math., **75**, (1983), 183−192.
51. S.Y. Chang and R. Fefferman, A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc, Ann. of Math. **112**, (1980), 179−201.
52. M. Christ, Weighted norm inequalities and Schur's lemma, Studia Math., LXXVIII, (1984), 309−319.
53. M. Christ and J.L. Journé, Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators, Acta Math., **159**, (1987), 51−80.
54. M. Christ and J.L. Rubio de Francia, Weak type(1,1)bounds for rough operators, Iny. Math., **93**, (1988), 225−237.
55. Z. Ciesielski, Properties of the orthonormal Franklin system, Studia Math, **23**, (1963), 141−157, and Studia Math. **27**, (1966), 289−323.
56. Z. Ciesielski, Bases and approximation by splines, Proc, Int. Congress of Math., Vancouver, (1974), Vol. II, 47−51.
57. Z. Ciesielski, Haar orthogonal functions in analysis and probability, Alfred Haar Memorial Conference, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, (1985), Budapest, 25−56.
58. Z. Ciesielski and T. Figiel, Spline approximation and Besov spaces on compact manifolds, Studia Math. LXXV, (1982), 13−36.
59. Z. Ciesielski and T. Figiel, Spline bases in classical function spaces on compact manifolds, Studia Math., LXXVI, (1983), 95−136.
60. R.R. Coifman, A real variable characterization of H^p, Studia Math., **51**, (1974), 269−274.
61. R.R Coifman, G. David et Y. Meyer, La solution des conjectures de Calderon, Advances in Mathematics, **48**, (1983), 144−148.
62. R.R. Coifman−D.G. Deng−Y. Meyer−Domaine de la racine carrée de certains opérateurs différentiels accrétifs. Ann. Inst. Fourier, **33**, 2, (1983), 123−134.
63. R. Coifman and C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximsl functions and singular integrals, Studia Math., **54**, (1974), 241−250.

64. R. Coifman, P.W. Jones and S. Sommes, Two elementary proofs of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz curves, preprint, Dept. of Math., Yale University, New Haven, CT 06520, U.S.A.

65. R.R. Coifman – A. McIntosh – Y. Meyer L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur les courbes Lipschitziennes – Ann. of Math., **116**, (1982) 361 – 387.

66. R.R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, The Hilbert transform on Lipschitz curves, Miniconference on partial differential equations (Canberra, July 9 – 10, 1981), edited by P.F. Price, L.M. Simon and N. S. Trudinger.

67. R. R. Coifman and Y. Meyer, Lavrentiev curves and conformal mappings, Institut Mittag – Leffler, Report No. 5, 1983.

68. R.R. Coifman, Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo – différentiels, Astérisque **57**, Soc. Math. France (1978).

69. R.R. Coifman, Y. Meyer, Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderon's theorem and analysis on Lipschitz curves, Lecture Notes in Mathematics, **779**, (1979), 109 – 122.

70. R.R. Coifman, Y. Meyer, Non – linear Harmonic Analysis, Operator theory and P.D.E., Beijing Lectures in Harmonic Analysis, edited by E.M. Stein, Annals of Mathematics Studies, **112**, (1986).

71. R. Coifman, Y. Meyer and E. Stein, Some new function spaces and their applications to harmonic analysis, Jour. of Funct. Anal., **62**, (1985), 304 – 335.

72. R. Coifman, Y. Meyer et E. Stein, Un nouvel espace fonctionnel adapté à l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières, Harmonic analysis, Cortona 1982, Lecture Notes in Math., **992**, Springer – Verlag.

73. R. Coifman, R. Rochberg and al., The molecular characterization of certain Hardy spaces, Asterisque **77**, Société mathématique de France, (1980).

74. R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several complex variables, Ann. of Math., **103**, (1976), 611 – 635.

75. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. A.M.S., **83**, (1977), 569 – 645.

76. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, Lecture Notes in Mathematics, **242**, Springer – Verlag.

77. R. Coifman and G. Weiss, Transference methods in analysis, Regional conference series in mathematics, n° 31, A.M.S.
78. A. Cordoba, Maximal functions, covering lemmas and Fourier multipliers, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XXXV, Part. I, 29-50.
79. A. Cordoba and R. Fefferman, A geometric proof of the strong maximal theorem, Annals of Math. **102**, (1975).
80. M. Cowling. Harmonic analysis on semigroups, Ann. of Math. **117**, (1983), 267-283.
81. B. Dahlberg, Estimates of harmonic measure, Arch. for Rat. Mech. and Anal., **65**, (1977), 275-288.
82. B. Dahlberg, Real analysis and potential theory, Proceedings of the International Congress of Math., Varsovie, (1983), Vol. 2, 953-959.
83. B. Dahlberg, Poisson semigroups and singular integrals, Proc; Amer. Math. Soc., 97, (1986), 41-48.
84. B. Dahlberg, D. Jerison and C. Kenig, Area integral estimates for elliptic differential operators with non-smooth coefficients, Arkiv f. Math., **22**, (1984), 97-108.
85. B. Dahlberg and C. Kenig, The L^p Neumann problem for Laplace's equation on Lipschitz domains, Annals of Math., **125**, (1987), 437-465.
86. B. Dahlberg, C. Kenig and G. Verchota, The Dirichlet problem for the bi-Laplacian on Lipschitz domains, Annales de l'institut Fourier de Grenoble, **36**, (1986), 109-135.
87. I. Daubechies, The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, AT&T Bell Laboratories, 600 Mountain Avenue, Murray Hill, N.J., 07974, U.S.A.
88. I. Daubechies, Orthonormal basis of compactly supported wavelets, AT&T Bell Labs., Murray Hill.
89. I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthonormal expansions, J. Math. Phys., 27, 5, May 1986, 1271-1283.
90. I. Daubechies and T. Paul, Wavelets and applications, Proceedings of the VIII/International Congress on Mathematical Physics, M. Mebkhout and R. Seneor, editors, World Scientific Publishers, 1987.
91. I. Daubechies, J.R. Klauder and T. Paul, Wiener measures for path integrals with affine kinematics variables, Jour. of Math. Physics, **28**, (1987), 85-102.
92. G. David, Opérateurs de Calderon-Zygmund, Proc. Int. Cong. Math., Berkeley, Ca., (1986), 890-899.

93. G. David, Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, Ann. Sci. E.N.S., **17**, (1984), 157–189.

94. G. David, A lower estimate for the norm of the Cauchy integral operator on Lipschitz curves (preprint).

95. G. David, Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières, 4ème série, tome 21, 1988, 225–258.

96. G. David and J. L. Journé, A boundedness criterion for generalized Calderon–Zygmund operators, Ann. of Math., **120**, (1984), 371–397.

97. G. David, J. L. Journé et S. Semmes, Opérateurs de Calderon–Zygmund, fonctions para–accrétives et interpolation, Revista Matematica Ibero Americana, Vol. I, 4, (1985), 1–56.

98. G. David, J.L. Journé and S. Semmes, Calderon–Zygmund operators, para–accretive functions, and interpolation, preprint, (Thèse, Centre de Mathématique, Ecole Plytechnique et Dept. of Math., Yale, USA).

99. G. David and S. Semmes, L'opérateur défini par v. p. $\int |(A(x)-A(y))/(x-y)|(x-y)^{-1}f(y)\,dy$ est borné sur $L^2(\mathbf{R})$ lorsque A est lipschitzienne, C.R.A.S., tome 303, Série I, **11**, (1986), 499–502.

100. G. Deslauriers et S. Dubuc, Interpolation dyadique, dans≪Fractals, dimensions non entières et applications≫, publié par G. Cherbit, Masson, (1987).

101 S.Dubuc, Interpolation through an iterative scheme, J. of Math. Anal. and Appl., **114**, 1,(1986), 185–204.

102. J.Duoandikoetxea and J.L. Rubio de Francia, Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimate, Invent. Math., **84**, (1986), 541–561.

103. P. Duren, Theory of H^p spaces, Academic press, (1970).

104. E. Fabes, M. Jodeit and N. Rivière, Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains, Acta Math. **141**, (1978), 165–186.

105. E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig, Multilinear Littlewood–Paley estimates with applications to partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., Vol. 79, (1982), 5746–5750.

106. E. Fabes, D.Jerison and C. Kenig, Multilinear squate functions and partial differential equations, Amer. Jor. of Math., **107**, (1985), 1325–1367.

107. P. Federbush, Quantum field theory in ninety minutes, Bull. Amer. Math. Soc., July 1987.

108. C. Fefferman, Recent progress in classical Fourier analysis, Proc. of the I.C.M., Vancouver(1974), tome I, 95–118.

109. C. Fefferman and E. Stein, H^pspaces of several variables, Acta Math., **129**, (1972) 137－193.

110. R. Fefferman, Multiparameter Fourier analysis, Beijing Lectures in Harmonic analysis, edited by E. Stein, Annals of Math. Studies, Princeton University Press **112**, (1986), 47－130.

111. R. Fefferman, Functions of bounded mean oscillation on the bi－disc, Annals of Math., **10**, (1979).

112. R. Fefferman, Calderon－Zygmund theory for product domains H^p spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 83, (1986), 840－843.

113. M. Frazier and B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, Indiana University Math. J., 34, (1985), 777－799.

114. M. Frazier and B. Jawerth, The－transform and decomposition of distribution, Proc. Conf. «Function Spaces and Applications», Lund 1986, Lect. Notes Math., Springer－Verlag.

115. J. Garcia－Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics, North Holland Math. Studies, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, (1985).

116. J. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, (1981).

117. J. Garnett, Corona problems, interpolation problems and inhomogeneous Cauchy－Riemann equations, Proc; Int. Cong. Math., Berkeley, Ca., (1986).

118. J.E. Gilbert, Nikishin－Stein theory and factorization with applications, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. XXXV, Part 2, (1979), 233－267.

119. G. Giraud, Equations à intégrales principales, Ann. Scient. E. N. S., (1934) 251－372.

120. J. Glimm and A. Jaffe, Quantum physics, a functional integral point of view, Springer－Verlag, New York, (1981).

121. P. Goupillaud, A. Grossmann and J. Morlet, Cycle－octave and related transforms in seismic signal analysis, Geoexploration, **23**, (1984/1985), 85－102, Elsevier Science Publishers, B.V. Amsterdam.

122. K. Grochenig, Analyse multiéchelle et bases d'ondelettes, CRAS Paris, Série I, (1987), 13－17.

123. A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland－Martinet and J. Morlet, Detection of abrupt changes in sound signals with the help of the wavelet transform, Preprint, Centre de Physique théorique, C. N. R. S. Luminy Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France.

124. A. Grossmann and J. Morlet, Decompositions of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, SIAM Journal Math. Anal.

15, (1984), 723 – 736.

125. A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, Integral transforms associated to square integrable representations I, J. Math. Phys., **26**, (1985) 2473 – 2479 and II, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théorique, Vol. **45**, (1986), 293 – 309.
126. M. De Guzman, Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Math. 481.
127. M. De Guzman, Real variable methods in Fourier analysis, Notas de Matematica, North – Holland Math. Studies, **46**.
128. A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. **69**, (1910), 331 – 371.
129. G.H. Hardy and J.E. Littlewood, A maximal theorem with function theoric applications, Acta Math., **54**, (1930), 81 – 116.
130. H. Helson, Harmonic Analysis, Addison – Wesley Publishing Company, 1983.
131. M. Holschneider, On the wavelet transformation of fractals objects, J. of statistical physics, **50**, (1988), 963 – 993.
132. M. Holschneider, R. Kronland – Martinet, J. Morlet et Ph. Tchamitchian, L'algorithme à trous, to be published in «Ondelettes, Méthodes Temps – Fréquence et Espaces de Phases, editors J. M. Combes, A. Grossmann et P. Tchamitchian, C.P.T., CNRS – Luminy Case 907, 13288 – Marseille – Cedex 9.
133. L. Hormander, The analysis of linear partial differential equations, Vols I, II et III, Springer – Verlag, New york, (1983 – 1985).
134. S. Jaffard et Y. Meyer, Bases d'ondelettes dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$, à paraître au journal de Mathématiques Pures et Appliquées.
135. S. Janson, communication orale, Congrès d'Analyse de Fourier, El Escorial, Juin 1987(à paraître aux LN, Springer – Verlag).
136. D. Jerison and C. Kenig, An identity with applications to harmonic measure, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 2, (1980), 447 – 451.
137. D. Jerison and C. Kenig, The Dirichlet problem in non – smooth domains, Annals of Math., **113**, (1981), 367 – 382.
138. D. Jerison and C. Kenig, Boundary value problems on Lipschitz domains, MAA studies in Math., **23**, Studies in Partial differential equations, W. Littman editor, (1982), 1 – 68.
139. D. Jerison and C. Kenig, The Neumann problem on Lipschitz domains, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 4, (1981), 203 – 207.
140. F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation,

Comm. Pure Appl. Math., **18**, (1965), 415 – 426.

141. R. Johnson, Application of Carleson measures to partial differential equations and Fourier multiplier problems, Harmonic Analysis, Cortona 1982, Lecture Notes in Math., **992**, Springer – Verlag.
142. P. W. Jones, Some topics in the theory of Hardy spaces, Topics in modern harmonic analysis, Proceedings of a seminar held in Torino, May – June 1982, Istituto Nazionale di alta matematica Francesco Severi, Vol. II, 551 – 569.
143. P. W. Jones, Recent advances in the theory of Hardy spaces, Proc. Int. Congr. Math., Varsovie, (1983), 829 – 838.
144. P.W. Jones, Fourier Analysis, El Escorial, Juin 1987, to be published in Springer – Verlag Lecture Notes.
145. P.W. Jones et M. Zinsmeister, Sur la transformation conforme des domaines de Lavrentiev, CRAS Paris, Série I, t. 295, (1982), 563 – 566.
146. J. L. Journé, Calderon – Zygmund operators, pseudo – differential operators and the Cauchy integral of Calderon, L. N., **994**, (1983), Springer – Verlag.
147. J.L. Journé, Calderon – Zygmund operators on product spaces, Revista Mathematica Iberoamericana, **1**, (1985), 55 – 91.
148. J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Ergebnisse der Math., 50, Springer – Verlag, (1970).
149. J.P. Kahane, Some random series of functions, Cambridge studies in advanced mathematics, 5, (1968).
150. J.P. Kahane, Y. Katznelson et K. de Leeuw, Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues, CRAS Paris, t. 285, 1001 – 1003.
151. T. Kato, Perturbation Theory for linear operators, Springer – Verlag, N. Y., (1966).
152. T. Kato, Scattering theory, MAA studies in Math., Vol. 7, edited by A.H. Taub, (1971), 90 – 115.
153. T. Kato and G. Ponce, On the Euler and Navier – Sokes equations in Lebesgue spaces $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, preprint, Dept. of Math., Univ. of California, Berkeley, California, 94720.
154. Y. Katznelson, An introduction to Fourier analysis, John Wiley & Sons, New York, 1968.
155. M.V. Keldysh et M. A. Lavrentiev, Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables., Ann. Sci. ENS., **54**, (1973), 1 – 38.
156. C. Kenig, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, Proc. Symp.

Pure Math., Vol. **34**, (1979), 263 – 274.

157. C. Kenig, Weighted H^p spaces on Lipschitz domains, Amer. Jour. of Math., **102**, (1980), 129 – 163.
158. C. Kenig, Recent progress on boundary – value problems on Lipschitz domains, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 43, (1985), 175 – 205.
159. C. Kenig, Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains, Beijing Lectures in Harmonic analysis, edited by E. Stein, Annals of Math. Studies **112**, Princeton University Press, (1986).
160. C. Kenig and Y. Meyer, The Cauchy integral on Lipschitz curves and the square root of second order accretive operators are the same, Recent progress in Fourier analysis, Math. Studies **111**, (1985), 123 – 145, North Holland.
161. C. Kenig and P. Tomas, Maximal operators defined by Fourier multipliers, Studia Math., **68**, (1980), 79 – 83.
162. P. Koosis, Introduction to H^p – spaces, London mathematical society lecture note series, Cambridge University Press.
163. R.H. Latter, A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms, Studia Math. **62**, (1978), 93 – 101.
164. P.G. Lemarié, Continuité sur les espaces de Besov des operateurs définis par des intégrales singulières, Ann; Inst; Fourier (Grenoble), **35**, (1985), 4, 175 – 187.
165. P.G. Lemarié, Bases d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés, à paraître au Bull. Soc. Math. France.
166. P.G. Lemarié et Y. Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, Revista Matematica Iberoamericana, Vol. 2, (1986), 1 – 18.
167. J.S. Liénard, Speech analysis and reconstruction using short – time, elementary waveforms., LIMSI – CNRS, Orsay, France.
168. J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, Contributions to the theory of classical Banach spaces, J. Functional Analysis, **8**, (1971), 225 – 249.
169. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer – Verlag, New York, (1977).
170. J. Littlewood and R. Paley, Theorems on Fourier series and power series, Jour. London Math. Soc. **6**, (1931), 230 – 233.
171. J. Littlewood and R. Paley, Theorems on Fourier series and power series, Proc. London Math. Soc. (2), **42**, (1937), 52 – 89.
172. A. McIntosh, Square roots of elliptic operators, Centre for Math. Analysis, Australian National University, GPO Box 4, Canberra, ACT 2601, Australia.

173. A. McIntosh, Square roots of elliptic operators, J. of Functional Analysis, **61**, 3, (1985), 307−327.

174. A. McIntosh, Functions and derivation of C^*−algebras, J. of Functional Analysis, **30**, 2, (1978), 264−275.

175. A. McIntosh, Counterexample to a question on commutators, Proc. Amer. Math. Soc., **29**, (1971), 430−434.

176. A. McIntosh, On representing closed accretive sesquilinear forms as $(A^{1/2}u, A^{*1/2}v)$, Macquarie Mathematics Reports, August 1981.

177. A. McIntosh, Clifford algebras and the higher dimensional Cauchy integral, « Approximation theory and function spaces», Banach Center, Varsovie, Pologne, 1986.

178. S. Mallat, Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$, à paraître dans Trans. of the Amer. Math. Soc. (1989).

179. S. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, à paraître dans IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Tech. Rep. MS−CIS−87−22, University of Pennsylvania, 1989.

180. S. Mallat, Dyadic wavelets energy zero−crossings, To appear as an invited paper in IEEE Trans. on Information Theory, Tech. Rep. MS−CIS−88−30, University of Pennsylvania, 1989.

181. S. Mallat, Multiresolution Representations and wavelets, Ph. D. in Electrical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA.

182. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, W.H. Freeman and Co., New York, 1983.

183. J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Stud. Math., VIII, (1939), 78−91.

184. B. Maurey, Isomorphismes entre espaces H^1, Acta Math., **145**, (1980), 79−120.

185. B. Maurey, Le système de Haar, Séminaire Maurey−Schwartz (1974/75), Ecole Polytechnique.

186. Y. Meyer, Wavelets and operators, Proc. special year in modern analysis, Urbana 1986/87, to be published by Cambridge University Press, (1989).

187. Y. Meyer, Real analysis and operator theory, Proc. Symp. Pure Math., **43**, (1985), 219−235.

188. Y. Meyer, Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, Cahiers Mathématiques de la Décision, $n°$ 8703, Ceremade.

189. Y. Meyer, *Intégrales singulières, opérateurs multilinéaires, analyse complexe et équations aux dérivées partielles*, Proc. Intern. Cong. Math. (1983), Varsovie, 1001 – 11010.

190. Y. Meyer – Intégrales singulières, opérateurs multilinéaires et équations aux dérivées partielles, Seminaire Goulaouic – Schwartz, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématique, 91128 – Palaiseau, France.

191. M. Meyer, Une classe d' espaces de type BMO. Applications aux intégrales singulières, à paraître à Ark. f. Math.

192. B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for classical operators, Proc. Symp. Pure Math. Vol. XXXV, Part I, 69 – 83.

193. T. Murai, Boundedness of singular integral operators of Calderon type (V and VI), Nagoya University preprint series(1984).

194. T. Murai, A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity, L.N. in Math., 1307, Springer – Verlag.

195. A. Nagel, N. Rivière and S. Wainger, On Hilbert transformations along curves, Bull. Amer. Math. Soc., **80**, (1974), 106 – 108.

196. A. Nagel, N. Rivière and S. Wainger, On Hilbert transforms along curves, Amer. Jour. Math., **98**, (1976), 395 – 403.

197. J. Necas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.

198. R. O'Neil, G. Sampson and G. Soares de Souza, Several characterization of the special atom spaces with applications, Revista Matematica Ibero – Americana, Vol. 2, 3, (1986), 333 – 355.

199. T. Paul, Functions analytic on the half plane as quantum mechanic states, J. Math. Phys., **25**, (1984), 3252 – 3263.

200. T. Paul, Wavelets and path integrals, to be published in «Ondelettes, Méthodes temps – fréquence et espaces des phases», J.M. Combes, A. Grossmann et P. Tchamitchian, editors, C.P.T., C.N.R.S. – Luminy, Case 907, 13288 – Marseille – Cedex 9.

201. J. Peetre, On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Ann. Math. Pura Appl., **72**, (1966), 295 – 304.

202. J. Peetre, New thoughts on Besov spaces, Duke Univ. Math. Dept., Durham, (1976).

203. D.H. Phong and E.M. Stein, Hilbert integrals, singular integrals and Radon transforms. Acta Math., **157**, (1985), 99 – 157.

204. G. Ponce, Propagation of $L^{q,k}$ smoothness for solutions of the Euler equation, preprint, Dept. of Math., University of Chicago, Chicago, Ill., 60637.

205. F. Ricci and G. Weiss, A characterization of $H^1(\sum_{n-1})$, Proc. Symp. Pure Math., Vol. XXXV, Part. I, 289−294.

206. X. Rodet, Time−Domain Formant−Wave−Function Synthesis, Computer Music Journal, Vol. 8, 3, Fall 1985.

207. J. L. Rubio de Francia (VII. 58) A new technique in the theory of A_p weights, Topics in modern harmonic analysis, Proc. Sem. Torino−Milano, Vol. II, 571−580.

208. J.L. Rubio de Francia, A Littlewood−Paley inequality for arbitrary intervals, Revista Matematica Ibero−Americana, 1, (1985), 2, 1−13.

209. W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, (1962).

210. C. Sadosky, Interpolation of operators and singular integrals, Marcel Dekker, (1979).

211. S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions, Monografie Matematyczne, Warszawa−Wroclaw, (1952).

212. S.W. Semmes, A criterion for the boundnedness of singular integrals on hypersurfaces, preprint, Dept. of Math., Yale, New Haven, 06520 C.T., U.S.A.

213. P. Sjolin and J.O. Stromberg, Spline systems as bases in Hardy spaces, Israel J. Math., **45**, (1983), 2−3, 147−156.

214. P. Sjolin and J.O. Stromberg, Basis properties of Hardy spaces, Ark. Mat., **21**, (1983), 111−125.

215. S. Spanne, Sur l'interpolation entre les espaces···, ANN. Scuola Norm. Pisa, **20**, (1966), 625−648.

216. D.A. Stegenga, Multipliers of the Dirichlet space, Illinois J. of Math., **24**, (1980), 113−139.

217. E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, (1970).

218. E.M. Stein, Topics in harmonic analysis, Ann. of Math. Studies, **63**, Princeton University Press, (1970).

219. E.M. Stein, On limits of sequences of operators, Ann. of Math., **74**, (1961), 140−170.

220. E.M. Stein and S. Wainger, Problems in Harmonic Analysis related to curvature, Bull. Amer. Math. Soc., **84**, (1978), 1239−1295.

221. E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton University Press, (1971).

222. E.M. Stein and G. Weiss, On the theory of H^p spaces, Acta Math. **103**, (1960), 25−62.

223. J.O. Stromberg, A modified Franklin system and higher−order spline systems on $\mathbf{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces, Conference in Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Vol. II, 475−493, edited by W. Beckner and al., Wadsworth math. series.
224. J. O. Stromberg, Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces, Indiana Univ. Math. J., **28**, (1979), 511−544.
225. J.O. Stromberg and A. Torchinsky, Weights, sharp maximal function and Hardy spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 3, (1980) 1053−1056.
226. T. Takagi, A simple example of a continuous function without derivative, The collected papers of Teiji Takagi, Iwanami Shoten Pub., (1973), 5−6. (III. 78).
227. P.Tchamitchian, Calcul symbolique sur les opérateurs de Calderon−Zygmund et bases inconditionnelles de $L^2(R)$, CRAS Paris, **303**,(1986), 215−218.
228. P. Tchamitchian, Ondelettes adaptées à l'analyse complexe, preprint.
229. E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford at the Clarendon Press, (1937).
230. H. Triebel, Theory of function spaces, Monographs in Mathematics, Vol. 78, Birkhauser Verlag, Basel (1983).
231. A. Uchiyama, A constructive proof of the Fefferman−Stein decomposition for BMO($\mathbf{R}^n$), Acta Math., **148**, (1982), 215−241.
232. G. Verchota, Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains, Jour. of Funct. Anal., **59**, 572−611.
233. S. Wainger, On some aspects of differentiation theory, Topics in modern harmonic analysis, Proc. Sem. Torino−Milano, May−June 1982, Istituto Nazionale di alta matematica Francesco Severi, Vol. II. 667−700.
234. S. Wainger, Averages and singular integrals over lower dimensional sets, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, edited by E. Stein, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, **112**, (1986).
235. J.M. Wilson, A simple proof of the atomic decomposition for $H^p(\mathbf{R}^n)$, Studia Math., **74**, (1982), 25−33.
236. J.M. Wilson, On the atomic decomposition for Hardy spaces (preprint).
237. P. Wojtaszczyk, The Franklin system is an unconditional basis in H^1, Ark. Mat. **20** (1982), 293−300.
238. M. Zinsmeister, Domaines de Lavrentiev, Publications Mathématiques d'Orsay, (1986), $n°$ 204.
239. A. Zygmund, Trigonometric Series, second edition, Cambridge University Press, (1968).

符 号 表

$\mathbb{N}$	全体正整数
$\mathbb{Z}$	全体整数
$\mathbb{Z}^n$	全体 n 维整数格点
$\mathbb{R}$	全体实数
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$\to$	对应到
$\hat{\varphi}$	函数或分布的 Fourier 变换
$\Leftrightarrow$	等价于

汉法词汇对照表

二　画

二进块	bioc dyadique
二进环	Cournne dyadique
二进插值	interpolation dyadique
八度音程	octave
几乎正交的	presque othogonal
几乎一定的	presque－surement
几乎对角化的	presque diagonal

三　画

小波	ondelette
小波的周期化	périodisées des ondelette
三角函数系	système trigonomètrique

四　画

双线性型	forme biliniaire
双峰小波	ondelette ò deux bosses
支集	Support
支柱	scole
分布	distribution
分段线性的	liniaire par morceaux
分形曲线	courbe fractale
分子	molecule
分割	dosage
分解	decomposition
分数次积分	dérivation fractionnaire

尺度	échelle
中间空间	espace intermédiaire

五 画

正交基	base othognormé
正则性	régularité
正交投影	projection othogonale
可求和族	famille sommable
节点	noeud
外推	extrapoler
平移	translation

六 画

共轭双线性的	Sesquiliniaire
共轭	dualité
伪微分算子	opérateur pseudo－differentiel
仿微分算子	opérateur paradifferentiel
自然的边界	frontière naturelle
全纯的函数	holomorphe fonction
多分辨率分析	analyse multirésolution
网	reseau
同构	isomorphisme
有限元	élements finis
有洞的	creux
轨道	orbite
交换收敛的	commutafivement convergent
齐次空间	homogène espace
扩张	agrandissement

七 画

系数	coefficient

位相	phase
延拓	prolongment
求和法	sommation
序列	suite
帐篷空间	espace de tentes
场的构造论	théorème constructive des champs
局部性	localisation
完全的	total
酉的	unitaire

八 画

非齐次空间	espace non－homogène
限制	restriction
奇性	singulairité
奇支集	support Singulier
软化平均	moyenne adoucie
试验函数	fonction de test
取样	echantillonnage
细节	detail
周期	période
周期小波	ondelette périodique
极大刻划	caractérisation maximale
极特殊原子	atome très spècial
单峰代数	algèbra des bosses
卷积	convolution
拓扑代数	algèbra topologique
实现算子	opérateur de relèvement

九 画

相消性	cancellation
保范	isométrie
重正规化	renomaliser

革新空间	espace d'innovation
矩	moment

十 画

原子	atome
特殊原子	atome spécial
特征函数	fonction indicatrice
圆盘代数	algèbra du disque
核	noyau
样条	spline
调和函数	fonction harmonique
调和延拓	prolongement harmonique
速降	décroissance rapide
紧支集	support compact
秩	rang
部分和	somme partielle
振动性	oscillation
乘子	multiplicateur
展缩	dilation
框架	frame

十一画

斜基	base obique
斜结构	structure obique
缺项的	lacunaire
随机级数	série aleatoire
理想的象	image ideale
混淆	aliassing

十二画

缓分布	distribution tempéreé

缓变	variations lente
逼近	approximation
最佳逼近	la meilleure approximation
强制的	coercitif
插值	interpolation

十 三 画

稠密	dense
滤波	filtrage
概率测度	mesure de probabilité
锯齿波函数	fonction en tents de scie
频率	frequence

十 四 画

模	module
模糊的象	image floue
算子	opérateur

十五画以上

增生的	accrétiq
整函数	fonction entière

以西文开头的名词

BMO 空间
Banach 代数
Banach 空间
Bernstein 不等式
Besov 空间
Beuring 代数
Botchkarier 定理
Brown 运动
Calderon 恒等式
Calderon 计划
(programme de Calderon)
Calderon－Zygmund 算子
Carleson 条件
Cauchy－Schwarz 不等式
Daubechies 准则
Dirac 函数
"Dirac 梳子"
(peigue de Dirac)
Dirac 质量
Fourier 级数
Fourier 积分
Gauss 函数
Haar 系
Heisenberg 测不准原理
(principe d'incertitude de Heisenberg)
Hilbert 变换
Hilbert 空间
Hölder 空间
Kato 理论
Khintchne 不等式
L^p 空间
$L^{p,s}$ 空间
Lipschitz 域
Littlewood－Paley 多分辨率分析
Littlewood－Paley 分解
Littlewood－Paley 分析
Lusin 面积积分
(fonction d'aire de Lusin)
Mallat 的小波
Maurey 定理
Paley－Wiener 定理
Plancherel 公式
Poisson 求和公式
(formule sommatoire de Poisson)
Radon 测度
Riesz 基
Schannon 条件
Schauder 基
Schwartz 类
Sobolev 空间
Wiener 代数
Zygmund 类
(classe de Zygmund)